KAOYAN SHUXUE FENXI ZONGFUXI

考研

数学分析总复习
——精选名校真题

陈守信　编著

第4版



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学分析总复习
——精选名校真题

第 4 版

陈守信　编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是数学类专业考研复习指导书. 本书通过精选的名校真题,讲解典型问题的方法和技巧. 全书共分八讲,包括极限、一元函数的连续性、一元函数的微分学、一元函数的积分学、级数、多元函数的微分学、多元函数的积分学、不等式.

本次修订增补了从北大、南开、科学院、华东师范、大连理工、华南理工等院校最近两年真题中精选出来的六十多道题目,并删去或新增了一批例题后的类题.

本书适合作为自学材料,也可作为相关课程的培训教材.

图书在版编目(CIP)数据

考研数学分析总复习:精选名校真题/陈守信编著. —4 版. —北京:机械工业出版社,2014.4
ISBN 978-7-111-46233-0

Ⅰ.①考… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 056864 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)
策划编辑:韩效杰 责任编辑:韩效杰 汤 嘉
版式设计:霍永明 封面设计:路恩中
责任印制:乔 宇
北京机工印刷厂印刷(三河市南杨庄国丰装订厂装订)
2014 年 5 月第 4 版第 2 次印刷
184mm×240mm · 25.25 印张 · 484 千字
标准书号:ISBN 978-7-111-46233-0
定价:49.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心:(010)88361066	教材网:http://www.cmpedu.com
销售一部:(010)68326294	机工官网:http://www.cmpbook.com
销售二部:(010)88379649	机工官博:http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线:(010)88379203	封面无防伪标均为盗版

前　言

“数学分析”是数学系最重要的基础课之一，也是数学系各专业考研的必考科目．由于它的内容多、技巧强、方法灵活使得很多考生在备考过程中遇到诸多疑难和困惑，甚至产生了畏难、厌学情绪．针对这种情况，我想以一个朋友的身份和大家聊聊，也许对你会有帮助．二十多年前，我作为一名考生，也遇到了大家今天所遇到的问题（有过之而无不及!），也曾有过放弃的念头，但在老师和同学们的鼓励下，我咬咬牙挺过来了！因此，我首先想和大家说的是：要相信自己，不要轻言放弃，顶一顶过了这一关，前面也许就一马平川了!

我从事数学分析的教学工作已有二十余年，积累了一些教学经验和教学心得，能够体会到同学们在学习数学分析中的酸甜苦辣！因此，有了想写一本帮助同学们备考用书的冲动．

在写书之初，我曾多次和考生座谈并发放问卷，倾听他们的想法，了解他们的困惑．许多同学真诚地提出了自己的问题，这让我非常感动！于是，我暗下决心：要尽我最大能力写好这本书，以求能给大家点滴帮助．同学们的问题归纳起来有如下几个方面：1．数学分析概念多、定理多，各章节的内容串联不起来．比如，求极限有许多方法和技巧，拿到题目不知道如何下手．2．微分中值定理证明题中辅助函数的构造．3．定积分的可积性理论、求不出原函数的定积分的计算等问题．4．广义积分尤其是含参变量广义积分，证明其收敛性或一致收敛性是难点．5．对于函数项级数，当要讨论和函数的分析性质（连续性、可积性和可导性），而定理的条件又不满足时，常常感到束手无策．6．第二型曲面积分计算时的补面、以及区域内部有奇性等如何处理．当然，同学们还提出了许多其他问题，比如：一元函数的一致连续和非一致连续性的证明；二重极限的计算；常考的不等式题型及其证明等等．从同学们所提的问题看，的确切中了数学分析的重点和难点，当然也是目前各类院校考研的重点．

同学们的问题就是我写这本书的指导思想，因此我在编写本书的过程中始终本着如下原则：不受知识体系的约束，坚持体系由解题方法所决定；不去罗列教材中的基本内容，仅对一些重要的、容易混淆的概念和定理进行深入、透彻的讲解．并恰如其分地阐述它们之间的区别与联系，以及使用时应该注意的事项；不

追求大而全、艰而难，注重解题思路的分析和解题技巧的提炼.

在整个写作的过程中，同学们的问题始终在我脑海萦绕. 我常常问自己：我回答了学生的问题吗？能给学生帮助吗？唯恐自己的闪失或能力所限辜负了同学们的期望！下面我想通过几个例子来说明，我是如何针对同学们的问题来安排书中内容的.

＊求极限的方法与技巧

在第一讲中我归纳总结了十余种求极限的方法，并通过典型例子阐明了它们的应用. 在此，我通过一个例子来说明如何去思考问题？

设数列 $\{x_n\}$ 由递推关系 $x_{n+1}=f(x_n)$ 所给出，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

拿到这个题目，大家会首先想单调有界定理. 如果单调有界定理失效，可能有的同学就“望题兴叹”了！可是大家不要忘记：数列收敛的本质是：充分靠后的任意两项之间的距离可以任意小. 这样我们就可以尝试使用压缩性条件或柯西收敛原理；如果还不行，可以考虑使用上、下极限法.

另外，如果数列 $\{x_n\}$ 由线性递推关系 $x_{n+1}=px_n+qx_{n-1},n=2,3,\cdots$ 所给出，其中 p,q 为常数，x_1,x_2 为已知. 对这种由线性递推关系所定义的数列，我们可以将其视为差分方程，通过求其特征方程的根（即特征根），写出 x_n 的通项公式，从而可求出 x_n 的极限.

＊与微分中值定理或泰勒公式有关的证明题中辅助函数的构造

在第三讲中，我通过对一些典型例题（这其中也包括与积分有关的题目）的分析、讲评，向大家介绍了：如何从题目的结论出发构造辅助函数. 由于构造辅助函数有一定的灵活性，通过区区几个例题大家可能仍然无法掌握其中的技巧和奥秘！为了克服这一困难，我又介绍了在多年教学实践中总结出来的“辅助多项式法”. 这种方法把充满技巧的辅助函数构造变成了机械地例行公事了.

＊定积分的计算

谈起定积分的计算问题，许多同学可能对此不以为然，会简单的认为：只要求出原函数问题就解决了！但是对那些原函数求不出来或不易求出来的怎么办？通常的想法是，作自变量的变换，这种变换充满了智慧和技巧. 在第四讲中，我给出了简单易行的“定积分计算技巧”，解决了一大类定积分计算问题.

如此等等，不再一一赘述.

关于本书我想再啰嗦几句. 书中的例题和类题大都来源于考研真题和近年来的全国大学生数学竞赛试题. 有些题目从年份上看，是早了一些，但是好的题目就像美妙的音乐，永远是不会过时的！在题目的取舍上既要照顾到介绍思想、方

法和技巧的需要，又要保证有一定的难度；在讲解上由浅入深，娓娓道来，尽量做到“平易近人”. 多数例题的后面都配有类题，并给出了详略不同的提示，这有利于同学们掌握和巩固例题中所学的方法和技巧. 许多理论上的讲解和题后的注记，都体现了笔者二十多年的教学经验和教学心得，凝聚了笔者的心血！同学们在阅读过程中要认真琢磨，细细品味，切不可蜻蜓点水一带而过.

如何进行考研总复习呢？许多同学向我提出这个问题. 我认为，首先把课本上的基本内容搞熟、搞透、掌握了，然后根据自己的情况选择一本合适复习的参考书，对所学的知识进行全面、系统地串联、归纳、总结、巩固和提高. 最后找几套你所报考院校近几年的考题试做一下，把握一下出题的深浅、侧重点以及出题人的偏好，以期做到对症下药，有的放矢.

如果本书能为你考研助一臂之力，那将是我最欣慰的事情.

天道酬勤，我坚信有耕耘就会有收获. 同学们，努力吧！成功属于你们！

你的朋友：陈守信

目　　录

前言
第一讲　极限…… 1
一、用极限的定义验证极限 …… 1
二、用单调有界定理证明极限的存在性 …… 4
三、用迫敛性定理求极限 …… 9
四、用柯西收敛准则证明极限的存在性…… 13
五、用施图兹定理求极限…… 14
六、用泰勒展开求极限…… 17
七、用中值定理求极限…… 20
八、两个重要极限·洛必达法则…… 21
九、用定积分的定义求极限…… 27
十、其他…… 29
第二讲　一元函数的连续性 …… 40
一、函数的连续性及其应用…… 40
二、一致连续性…… 52
第三讲　一元函数的微分学 …… 63
一、导数与微分…… 63
二、高阶导数…… 70
三、微分中值定理及其应用…… 75
四、泰勒公式…… 90
五、函数零点个数的讨论 …… 103
第四讲　一元函数的积分学…… 106
一、不定积分的计算 …… 106
二、定积分的计算 …… 116
三、函数的可积性理论 …… 123

四、定积分的性质及其应用 …… 129
五、广义积分 …… 140
第五讲　级数 …… 156
一、数项级数 …… 156
二、函数项级数 …… 173
三、幂级数 …… 194
四、傅里叶级数 …… 210
第六讲　多元函数的微分学 …… 223
一、多元函数的极限与连续 …… 223
二、多元函数的偏导数与全微分 …… 233
三、隐函数(组)存在定理及隐函数求偏导 …… 247
四、偏导数的应用 …… 254
第七讲　多元函数的积分学 …… 278
一、含参变量积分 …… 278
二、重积分 …… 302
三、曲线积分 …… 326
四、曲面积分 …… 340
第八讲　不等式 …… 358
一、几个著名的不等式 …… 358
二、利用凸函数的性质证明不等式 …… 365
三、利用函数的单调性与极值证明不等式 …… 371
四、积分不等式 …… 379
参考文献 …… 393

第一讲　极　　限

在这一讲中,我们将涉及数列极限和函数极限.用于论证极限存在性的概念和定理很多,像极限的定义、单调有界定理、柯西收敛准则、迫敛性定理、施图兹定理、泰勒展开、中值定理(包括微分中值定理和积分中值定理)、两个重要极限以及洛必达法则等.

一、用极限的定义验证极限

例 1.1　用定义证明:(1)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$;

(2)若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n = b$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = ab.$$

证明　(1)由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$ 知, $\forall\varepsilon > 0, \exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

固定 N_0,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1} + a_{N_0} + \cdots + a_n}{n} - a\right|\\ \leqslant\ &\frac{|a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0-1} - a|}{n} + \frac{|a_{N_0} - a| + \cdots + |a_n - a|}{n}\\ <\ &\frac{M}{n} + \frac{n - N_0 + 1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

其中, $M = |a_1 - a| + |a_2 - a| + \cdots + |a_{N_0-1} - a|$,对固定的 N_0 而言,它是一个确定的常数.故对上述 $\varepsilon > 0, \exists N \geqslant N_0$, 当 $n \geqslant N$ 时,有 $\dfrac{M}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 从而

$$\left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_0 + 1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(2)令 $a_n = a + \alpha_n, b_n = b + \beta_n$, 则当 $n \to \infty$ 时, $\alpha_n, \beta_n \to 0$. 于是

$$\begin{aligned}&\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n}\\ =\ &\frac{(a + \alpha_1)(b + \beta_n) + (a + \alpha_2)(b + \beta_{n-1}) + \cdots + (a + \alpha_n)(b + \beta_1)}{n}\end{aligned}$$

$$= ab + a\frac{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}{n} + b\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{n} + \frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}.$$

由(1)知,上式的第二、三项趋向于零. 下证第四项极限也是零.

事实上,由 $\alpha_n \to 0(n \to \infty)$ 知, α_n 有界,即存在 $M > 0$, 使 $|\alpha_n| \leqslant M$. 故

$$0 < \left|\frac{\alpha_1\beta_n + \alpha_2\beta_{n-1} + \cdots + \alpha_n\beta_1}{n}\right| \leqslant M\frac{|\beta_n| + |\beta_{n-1}| + \cdots + |\beta_1|}{n} \to 0,$$

从而(2)的极限是 ab.

注 1.1 (2)的极限亦可用(1)的方法来证明. 此时需要将所考察的差分三段来估计,请同学们试一下.

(1)的结果是十分有用的,利用它可迅速求出一些极限.

例如:1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n}$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{n}{n+1}}{n}$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

类题 1 用定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^n} = 0$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

提示 (1) $\left|\dfrac{n!}{n^n} - 0\right| = \dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$;

(2)对固定 a, 存在 $N_0 > 0$,当 $n > N_0$ 时,有 $n > |a|$,即 $\dfrac{|a|}{n} < 1$. 考察

$$\left|\frac{a^n}{n!} - 0\right| = \frac{|a|^n}{n!} = \frac{|a|^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{|a|}{N_0+1}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{n} < \frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n} = \frac{M}{n} \quad \left(\text{其中 } M = \frac{|a|^{N_0+1}}{N_0!}\right);$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$, 取 $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ 知, $\exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $0 < \dfrac{a^n}{n!} < 1$, 即 $0 < \dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}} < \varepsilon$.

类题 2 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty}b_n = b \neq 0$, 用定义证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{a}{b}\quad(\text{清华大学},2001).$$

类题3　设 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，$\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$，用定义证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}f(g(x))=\infty$（南京航空航天大学）.

提示　由 $\lim\limits_{y\to+\infty}f(y)=\infty$，$\forall G>0$ 充分大，存在充分大的 $Y_0>0$，当 $y>Y_0$ 时，有 $|f(y)|>G$.

又由 $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$，对上述 $Y_0>0$，存在充分大 $X_0>0$，当 $x<-X_0$ 时，有 $g(x)>Y_0$.

综上知，$\forall G>0$，$\exists X_0>0$，当 $x<-X_0$ 时，有 $|f(g(x))|>G$.

例1.2　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在（武汉大学）.

证明　用反证法. 假设 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)=a$，有

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+2)-\sin n]=2\lim_{n\to\infty}\sin 1\cdot\cos(n+1)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\cos(n+1)=\lim_{n\to\infty}\cos n=0.$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\sin 2n=2\lim_{n\to\infty}(\sin n\cdot\cos n)=0,$$

即 $a=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n=0$，但是 $1=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^2 n+\sin^2 n)=0$，矛盾. 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 不存在.

类题　设 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$（上海大学）.

提示　$\{x_n\}$ 显然单调递增，只需证明 $\{x_n\}$ 没有上界即可. $\forall n\in\mathbf{N}_+$，有

$$x_{2n}-x_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

由此，用数学归纳法可证：$x_{2^k}\geqslant 1+\dfrac{k}{2}$　$(k=0,1,2,\cdots)$，因此 $\{x_n\}$ 没有上界.

例1.3　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-x_{n-2})=0$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{n}=0$（四川大学）.

证明　当 $n>N_0\geqslant 2$ 时，有

$$\begin{aligned}x_n-x_{n-1}=&[(x_n-x_{n-2})+(x_{n-2}-x_{n-4})+\cdots+x_{N_0-2}\text{ 或 }x_{N_0-1}]-\\&[(x_{n-1}-x_{n-3})+(x_{n-3}-x_{n-5})+\cdots+x_{N_0-2}\text{ 或 }x_{N_0-1}],\end{aligned}$$

共有 $n-N_0+1$ 项 (x_k-x_{k-2}) 及 $\pm(x_{N_0-1}-x_{N_0-2})$.

由题设，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_0>0$，当 $n\geqslant N_0$ 时，有 $|x_n-x_{n-2}|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是有

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \frac{n - N_0 + 1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2} + \frac{|x_{N_0-1}| + |x_{N_0-2}|}{n},$$

取 n 适当大,可使$\frac{|x_{N_0-1}| + |x_{N_0-2}|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. 从而,当 n 适当大时,就有 $\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{n}\right| < \varepsilon$.

二、用单调有界定理证明极限的存在性

例 1.4 证明数列 $a_1 = \sqrt{c} > 0, a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$ 的极限存在,并求其值.

证明 显然 $\{a_n\} \uparrow$,下证 $\{a_n\}$ 有上界.

$$a_1 = \sqrt{c} < \sqrt{c} + 1,$$

设 $a_n < \sqrt{c} + 1$,则

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + \sqrt{c} + 1} < \sqrt{c} + 1,$$

即 $\{a_n\}$ 有上界 $\sqrt{c} + 1$.

由单调有界定理, $\{a_n\}$ 的极限存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 在 $a_{n+1}^2 = c + a_n$ 中,令 $n \to \infty$ 得 $a^2 = c + a$, 解之,得

$$a = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c}).$$

例 1.5 若 $\{a_n\} \uparrow, \{b_n\} \downarrow$,且$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$,证明$\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在,并且相等(南京航空航天大学).

证明 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 知, $\exists N_0 > 0$,当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$-1 < a_n - b_n < 1.$$

由此知,$a_n < b_n + 1 \leqslant b_{n-1} + 1 \leqslant \cdots \leqslant b_{N_0} + 1$,即$\{a_n\}$ 有上界;

$b_n > a_n - 1 \geqslant a_{n-1} - 1 \geqslant \cdots \geqslant a_{N_0} - 1$,即$\{b_n\}$ 有下界.

由单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n, \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 都存在. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$ 可得: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, 即两者极限相等.

例 1.6 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正整数数列, $a_1 = b_1 = 1, a_n + \sqrt{3}b_n = (a_{n-1} + \sqrt{3}b_{n-1})^2$. 证明:数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$的极限存在,并求该极限值(南开).

解 当 $n \geqslant 2$ 时,由 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为正整数数列,利用已知的递推关系式可得

$$a_n = a_{n-1}^2 + 3b_{n-1}^2, \quad b_n = 2a_{n-1}b_{n-1},$$

进而有

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n-1}}{2b_{n-1}} + \frac{3b_{n-1}}{2a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \cdots.$$

记 $\alpha_n = \frac{a_n}{b_n}$,则上式可化为 $\alpha_n = \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \frac{3}{2\alpha_{n-1}}$. 由此易得 $\alpha_n \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha_{n-1}}{2}\cdot\frac{3}{2\alpha_{n-1}}} =$

$\sqrt{3}$,这表明数列$\{\alpha_n\}$有下界.

另一方面,$\dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2\alpha_{n-1}^2}\leqslant\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$,即$\alpha_n\leqslant\alpha_{n-1}$,这表明数列$\{\alpha_n\}$单调递减. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$存在,记为$\alpha$. 在$\alpha_n=\dfrac{\alpha_{n-1}}{2}+\dfrac{3}{2\alpha_{n-1}}$两边取极限,可得$\alpha=\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{3}{2\alpha}$. 解之得$\alpha=\sqrt{3}$.

例 1.7　设$x_1=\sqrt{2},x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明数列$\{x_n\}$收敛,并求其极限.

证法 1　假设$\{x_n\}$的极限存在,并设为A,则$A=\dfrac{1}{2+A}$,即$A^2+2A-1=0$,$A=-1\pm\sqrt{2}$. 因为$x_n>0$,故$A=\sqrt{2}-1$.

若$x_n<A$,则$x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}>\dfrac{1}{2+A}=A$;

若$x_n>A$,则$x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}<\dfrac{1}{2+A}=A$.

由$x_1=\sqrt{2}>A$知,$x_{2n+1}>A$,而$x_{2n}<A$.

下面将证明:$\{x_{2n+1}\}\downarrow A$,$\{x_{2n}\}\uparrow A$. 事实上,

$$x_{n+2}-x_n=\frac{1}{2+x_{n+1}}-x_n=\frac{1}{2+\dfrac{1}{2+x_n}}-x_n$$

$$=\frac{2(1-2x_n-x_n^2)}{5+2x_n},$$

而$1-2x-x^2=0$的根为$x=-1\pm\sqrt{2}$,故

$$x_{n+2}-x_n=\frac{2(1+\sqrt{2}+x_n)\cdot(\sqrt{2}-1-x_n)}{5+2x_n}\quad\begin{cases}>0, & \text{若 } x_n<A,\\ <0, & \text{若 } x_n>A.\end{cases}$$

即$\{x_{2n}\}\uparrow$以A为上界,$\{x_{2n+1}\}\downarrow$以A为下界,故它们的极限都存在,分别设为α,β. 由

$$x_{2n}=\frac{1}{2+x_{2n-1}}\text{及}x_{2n+1}=\frac{1}{2+x_{2n}},$$

取极限可得

$$\alpha=\frac{1}{2+\beta}\text{及}\beta=\frac{1}{2+\alpha},$$

故$\alpha=\beta=A=\sqrt{2}-1$.

类题 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$，数列 $\{x_n\}$ 由如下递推公式定义：$x_0=1, x_{n+1}=f(x_n)(n=0,1,2,\cdots)$，求证 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$（浙江大学）.

注 1.2 下面介绍一个有用的命题. 设数列 $\{x_n\}$ 满足压缩性条件：

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|(0<k<1;\quad n=2,3,\cdots),$$

则 $\{x_n\}$ 收敛.

这个命题的证明，用柯西收敛准则不难得到.

证法 2 注意到 $x_n>0$，我们有

$$|x_{n+1}-x_n|=\frac{|x_n-x_{n-1}|}{(2+x_n)(2+x_{n-1})}<\frac{1}{4}|x_n-x_{n-1}|.$$

由命题知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，在已知的等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}$ 两边取极限，舍去负值，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}-1$.

例 1.8 设 $c>0, x_1=a>0, x_{n+1}=\dfrac{c(1+x_n)}{c+x_n}(n=1,2,\cdots)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

证明 由

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})(c+x_n)}=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+x_n(c+x_{n-1})},$$

利用已知的关系式 $x_n(c+x_{n-1})=c(1+x_{n-1})$ 可得

$$x_{n+1}-x_n=\frac{c(c-1)(x_n-x_{n-1})}{c(c+x_{n-1})+c(1+x_{n-1})}=\frac{(c-1)(x_n-x_{n-1})}{(c+x_{n-1})+(1+x_{n-1})}.$$

注意到 $x_n\geqslant 0$，由上式得

$$|x_{n+1}-x_n|\leqslant\frac{|1-c|}{1+c}|x_n-x_{n-1}|,\quad n\geqslant 2.$$

易见，$\dfrac{|1-c|}{1+c}<1$，由命题知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 在已知的关系式两边取极限可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

简单推论 设 $c>0, x_1=a>0, x_{n+1}=\dfrac{c+x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

证明 令 $y_n=\dfrac{1}{x_n}$，则有

$$y_{n+1}=\frac{c^{-1}(1+y_n)}{c^{-1}+y_n},\quad n=1,2,\cdots.$$

由例 1.8 知，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{1}{\sqrt{c}}$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{c}$.

类题 1　设 $x_{n+1}=\dfrac{3(1+x_n)}{3+x_n}$　($x_1>0$ 为已知),求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ (南京大学).

类题 2　设 $a_1=0,a_n=\dfrac{a_{n-1}+3}{4}$　($n\geqslant 2$),求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ (南京大学).

类题 3　(斐波那契(Fibonacci)数列)设 $a_0=a_1>0,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=0,1,2,\cdots)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

提示　令 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, 则有

$$b_0=1,b_n=1+\frac{1}{b_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$$

由 $|b_{n+1}-b_n|=\dfrac{|b_n-b_{n-1}|}{b_nb_{n-1}}$,利用 $b_nb_{n-1}=b_{n-1}+1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|=\frac{|b_n-b_{n-1}|}{b_{n-1}+1}.$$

又由 $b_n>1$ 可得

$$|b_{n+1}-b_n|<\frac{1}{2}|b_n-b_{n-1}|,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 存在.

类题 4　设 $x_0=\sqrt{7},x_1=\sqrt{7-\sqrt{7}}$, 定义:

$$x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}},n=0,1,\cdots.$$

证明:数列 $\{x_n\}$ 收敛并求其极限.

提示　设 $f(x)=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$,由拉格朗日中值定理,有

$$f(x)-2=f(x)-f(2)=f'(\xi)(x-2),$$

其中,ξ 在 x 与 2 之间.

由于 $0<x_n\leqslant\sqrt{7}$,所以可限制 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{7}$,此时 $\xi\in[0,\sqrt{7}]$. 于是,有

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{-1}{4\sqrt{7-\sqrt{7+\xi}}\sqrt{7+\xi}}\right|\leqslant\frac{1}{4\sqrt{7}\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}\triangleq\alpha<1,$$

和　　$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-2|\leqslant\alpha|x_n-2|,$$

故　　$$|x_{2k}-2|\leqslant\alpha^k|x_0-2|,|x_{2k+1}-2|\leqslant\alpha^k|x_1-2|(k=1,2,\cdots).$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

下面看一个与欧拉常数有关的数列.

例 1.9　设 $b_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明数列 $\{b_n\}$ 收敛(北师大).

证明 因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (\text{请同学们自证}),$$

所以 $$\frac{1}{n+1} < \ln\frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是 $b_{n+1}-b_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\frac{n+1}{n} < 0$, 即 $\{b_n\}$ 单调递减.

又
$$\begin{aligned} b_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} - \ln n \\ &> \ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n} - \ln n \\ &= \ln(n+1) - \ln n > 0, \text{即} \{b_n\} \text{有下界 } 0. \end{aligned}$$

由单调有界定理, $\{b_n\}$ 的极限存在,记为 C(通常称为欧拉常数).

类题 1 设 $s_1 = \ln a, a > 0, s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(a - s_k), n = 2,3,\cdots.$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a - 1.$

提示 利用不等式 $\ln x \leqslant x - 1 \quad (x > 0)$, 证明 $\ln(a - s_k)$ 有意义.

当 $k = 1$ 时, $a - s_1 = a - \ln a > 0.$

设 $k \leqslant n$ 时,有 $a - s_k > 0$ 即 $\ln(a - s_k)$ 有意义,于是,

$$s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \leqslant a - s_n - 1,$$

所以 $s_{n+1} \leqslant a - 1$, 即 $\ln(a - s_{n+1})$ 有意义且 $\{s_n\}$ 有上界.

由 $s_{n+1} - s_n = \ln(a - s_n) \geqslant \ln(a - (a-1)) = 0$ 可知, $\{s_n\} \uparrow$. 由单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在. 易见 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a - 1.$

类题 2 设 $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, n = 1,2,\cdots.$ 证明: $\{x_n\}$ 收敛.

提示 由
$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{2\sqrt{n+1}} = 0, \end{aligned}$$

知 $\{x_n\} \downarrow$.

又由 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 可得

$$x_n > 2[(\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})] - 2\sqrt{n}$$

$$= 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-2 > -2,$$

这表明 $\{x_n\}$ 有下界.

三、用迫敛性定理求极限

例 1.10　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0.$

证明

$$n! = 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\cdot\cdots\cdot n$$

$$\geqslant\begin{cases}\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]}=\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数},\\ \left(\dfrac{n}{2}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\geqslant\left(\dfrac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数},\end{cases}$$

故

$$0\leqslant\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\leqslant\sqrt{\frac{2}{n}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

例 1.11　设 a_1,b_1 为任意选定的实数，a_n 和 b_n 的定义为：

$$\begin{cases}a_n=\displaystyle\int_0^1\max\{b_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x, n=2,3,\cdots,\\ b_n=\displaystyle\int_0^1\min\{a_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x, n=2,3,\cdots.\end{cases}$$

试证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2-\sqrt{2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\sqrt{2}-1$（南开）.

证明　先证明 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是有界数列. 当 $n=2,3,\cdots$ 时，有

$$a_n=\int_0^1\max\{b_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$b_n=\int_0^1\min\{a_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

于是，当 $n=3,4,\cdots$ 时，有

$$a_n=\int_0^1\max\{b_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1\max\left\{\frac{1}{2},x\right\}\mathrm{d}x=\frac{5}{8},$$

$$b_n=\int_0^1\min\{a_{n-1},x\}\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\min\left\{\frac{1}{2},x\right\}\mathrm{d}x=\frac{3}{8}.$$

由此可见，当 $n\geqslant 3$ 时，$\dfrac{1}{2}\leqslant a_n\leqslant\dfrac{5}{8}$，$\dfrac{3}{8}\leqslant b_n\leqslant\dfrac{1}{2}$，即 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 有界.

再给出 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的递推关系式. 当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$a_{n+1}=\int_0^1\max\{b_n,x\}\,\mathrm{d}x=\int_0^{b_n}\max\{b_n,x\}\,\mathrm{d}x+\int_{b_n}^1\max\{b_n,x\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{b_n} b_n \mathrm{d}x + \int_{b_n}^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}b_n^2, \tag{1}$$

$$b_{n+1} = \int_0^1 \min\{a_n, x\}\,\mathrm{d}x = \int_0^{a_n} \min\{a_n, x\}\,\mathrm{d}x + \int_{a_n}^1 \min\{a_n, x\}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{a_n} x\mathrm{d}x + \int_{a_n}^1 a_n \mathrm{d}x = a_n - \frac{1}{2}a_n^2, \tag{2}$$

从式(1)、式(2)中消去 b_n,可得:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(a_{n-1} - \frac{1}{2}a_{n-1}^2\right)^2, n = 3,4,\cdots. \tag{3}$$

最后研究 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 的存在性.

记 $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x\right)^2, x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$,则 $f'(x) = x(1-x)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) > 0$.

由此可知,无论 $a_2 \geqslant a_4$,还是 $a_2 \leqslant a_4$,数列 $\{a_{2n}\}$ 均单调有界,因而极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ 存在,记为 A_1.

同理可以证明,$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$ 也存在,记为 A_2.

由式(3)可知,A_1, A_2 应该是方程 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x\right)^2$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ 上的两个实根. 注意到 $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}x\right)^2 \Leftrightarrow x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = 0$,而

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = (x^4 - 4x^3 + 2x^2) + (2x^2 - 8x + 4)$$

$$= x^2(x^2 - 4x + 2) + 2(x^2 - 4x + 2) = (x^2 + 2)(x^2 - 4x + 2),$$

所以,方程 $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 8x + 4 = 0$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ 上的实根,就是方程 $x^2 - 4x + 2 = 0$ 在 $\left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right]$ 上的唯一实根 $x = 2 - \sqrt{2}$. 这表明 $A_1 = A_2 = 2 - \sqrt{2}$,从而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2 - \sqrt{2}$.

再由式(2)可知,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{2} - 1$.

例 1.12 设 $a_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}$,(1)求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$;(2)求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

解 (1)由于 $a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}$,所以

$$0 \leqslant a_n^2 < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right)\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1},$$

故

$$0 \leqslant a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \to 0 \quad (n \to \infty);$$

(2) 一方面,由 $a_n=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}$,可得 $\sqrt[n]{a_n}>\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}$;

另一方面,由式(1)可知,$\sqrt[n]{a_n}<\frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}$. 联合以上两式,有 $\frac{1}{\sqrt[n]{2n}}<\sqrt[n]{a_n}<\frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}$.

由迫敛性定理,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1$.

例 1.13　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$(数学Ⅲ).

解　记 $G=\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}$, 则

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n}<G<\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1},$$

即
$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}<G<\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}.$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}=\frac{1}{2},$$

故
$$\lim_{n\to\infty}G=\frac{1}{2}.$$

类题 1　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$,$(0<\alpha<1)$.

提示　(1)$0<\frac{n^5}{e^n}<\frac{n^5}{2^n}=\frac{n^5}{(1+1)^n}$

$$=\frac{n^5}{1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^6+\cdots+C_n^n}<\frac{n^5}{C_n^6}\to 0;$$

(2)因为 $n!<\sum\limits_{p=1}^{n}p!<(n-2)\cdot(n-2)!+(n-1)!+n!<2\cdot(n-1)!+n!$,

所以
$$1<\frac{\sum\limits_{p=1}^{n}p!}{n!}<\frac{2}{n}+1;$$

(3)因为 $\alpha-1<0$, 所以 $(1+n)^{\alpha-1}<n^{\alpha-1}$, 故 $(1+n)^\alpha<n^{\alpha-1}(1+n)=n^\alpha+n^{\alpha-1}$,即 $0<(1+n)^\alpha-n^\alpha<n^{\alpha-1}\to 0$.

类题 2　(1)若 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\};$$

(2)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$,$(x\geqslant 0)$.

提示 (1)记 $G=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$,则

$$G\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{mG^n}=\sqrt[n]{m}G,$$

由迫敛性定理可得结论;

(2)由(1),原极限 $=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ \max\left\{x,\frac{x^2}{2}\right\}, & x\geqslant 1.\end{cases}$

$$=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

类题 3 设 Φ_n 满足:$\Phi_n^3+2\Phi_n+\frac{1}{n}=0(n=1,2,\cdots)$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n$(解放军信息工程大学).

提示 由已知条件,有 $\Phi_n(\Phi_n^2+2)=-\frac{1}{n}$,$n=1,2,\cdots$. 由此可知,$\Phi_n<0$,即 $\{\Phi_n\}$ 有上界.

再由已知条件,可得

$$(\Phi_{n+1}-\Phi_n)(\Phi_{n+1}^2+\Phi_n\Phi_{n+1}+\Phi_n^2+2)=\frac{1}{n(n+1)},\quad n=1,2,\cdots.$$

由此可知,$\{\Phi_n\}$ 单调递增,故 $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n$ 存在,记为 φ,在所给的等式两边取极限可得:$\varphi^3+2\varphi=0$. 由 $\{\Phi_n\}$ 的递增性知 $\varphi=0$.

例 1.14 设 $a_1>b_1>0$,且 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$,$b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$ $(n=2,3,\cdots)$. 证明数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的极限存在且都等于 $\sqrt{a_1b_1}$(北师大).

证明 显然,$a_n,b_n>0$ 且

$$a_n\geqslant\sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}\geqslant b_n\quad(n=1,2,\cdots).$$

由 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}\leqslant\frac{a_{n-1}+a_{n-1}}{2}=a_{n-1}$ 知,$\{a_n\}\downarrow$;由 $b_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\geqslant\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{2a_{n-1}}=b_{n-1}$ 知,$\{b_n\}\uparrow$.

又由 $a_n\geqslant b_n\geqslant b_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant b_1$ 知,$\{a_n\}$ 有下界,

$b_n\leqslant a_n\leqslant a_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant a_1$ 知,$\{b_n\}$ 有上界.

由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ 都存在. 在 $a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$ 两边取极

限可得，$a = b$.

再由 $a_n b_n = a_{n-1} b_{n-1}$ 可推知 $a_n b_n = a_1 b_1$，取极限可得 $a = b = \sqrt{a_1 b_1}$.

四、用柯西收敛准则证明极限的存在性

例 1.15　方程 $x = m + \varepsilon \sin x$　$(0 < \varepsilon < 1)$ 称为开普勒方程. 若 $x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \cdots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}, \cdots$，则数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$，则 ξ 是开普勒方程的唯一解(即 $\xi = m + \varepsilon \sin \xi$)，亦称为方程的不动点(复旦大学).

证明　考察

$$|x_{n+1} - x_n| = \varepsilon |\sin x_n - \sin x_{n-1}| = 2\varepsilon \left|\sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2}\right| \cdot \left|\cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right|$$

$$\leqslant \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \leqslant \cdots \leqslant \varepsilon^{n-1} |x_2 - x_1|,$$

于是，对任意的自然数 p，有

$$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$$

$$\leqslant (\varepsilon^{n+p-1} + \varepsilon^{n+p-2} + \cdots + \varepsilon^{n-1}) |x_2 - x_1|$$

$$< \frac{\varepsilon^{n-1}}{1 - \varepsilon} \cdot |x_2 - x_1| \to 0 (n \to \infty).$$

由柯西收敛准则，$\{x_n\}$ 收敛. 若设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$，在方程 $x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$ 两边取极限可知，ξ 是开普勒方程的解，即 $\xi = m + \varepsilon \sin \xi$.

下证：唯一性.

若 η 也是开普勒方程的解，即 $\eta = m + \varepsilon \sin \eta$，则

$$|\xi - \eta| = \varepsilon |\sin \xi - \sin \eta| \leqslant \varepsilon |\xi - \eta|,$$

由 $0 < \varepsilon < 1$ 知，$|\xi - \eta| = 0$，即 $\xi = \eta$. 这表明 ξ 是开普勒方程的唯一解.

例 1.16　用柯西收敛准则证明：$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 收敛.

证明　当 n 适当大时，对任意的自然数 p，有

$$\begin{aligned}
&|x_{n+p} - x_n| \\
&= \left|(-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} + (-1)^{n+3} \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{n+p+1} \frac{1}{n+p}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + (-1)^{p-1} \frac{1}{n+p}\right| \\
&= \left|\frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5}\right) - \cdots - \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)\right. \\
&\qquad \left. \text{或} \pm \frac{1}{n+p}\right|
\end{aligned}$$

$$< \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+p} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n},$$

$\forall \varepsilon > 0$，取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1$，当 $n > N$ 时，$\forall p$ 为自然数，都有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

由柯西收敛准则，$\{x_n\}$ 收敛.

类题 1 用柯西收敛准则证明下列数列发散.

(1) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$；

(2) $b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}$.

提示 “数列 $\{x_n\}$ 不满足柯西收敛准则”的正面陈述是：$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_0, m_0 \geqslant N$，使 $|x_{n_0} - x_{m_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

(1) 取 $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0, \forall N > 0$，取 $n_0 = 2N, m_0 = N$，则有

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| = \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > N \cdot \frac{1}{2N} = \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

(2) 用不等式 $\ln x < x\ (x > 1)$ 易证.

类题 2 判断题：数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，使得当 $n > N$ 时，恒有 $|a_{2n} - a_n| < \varepsilon$.（正确的说明理由，错误的举出反例）（华东师大）

提示 该论断不正确. 考察数列：$a_n = \begin{cases} 1, \text{若 } n \text{ 不能被 3 整除}, \\ 2, \text{若 } n \text{ 能被 3 整除}. \end{cases}$ 不难发现，$\{a_n\}$ 满足：$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_{2n} - a_n| < \varepsilon$，但数列 $\{a_n\}$ 不收敛.

五、用施图兹定理求极限

为方便起见，我们不加证明地将施图兹定理叙述如下：

施图兹定理 设 $\{y_n\}$ 是严格单调增加的正无穷大量，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a \quad (a \text{ 可为有限量，也可为 } +\infty \text{ 或 } -\infty),$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = a.$$

注 1.3 施图兹定理在处理一类复杂数列的极限时，非常方便！

例如，在例 1.1(1) 中，若令 $x_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, y_n = n$，可立即得到结论.

例 1.17 求极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} \quad (k \text{ 为自然数}).$$

解　令 $x_n = 1^k + 2^k + \cdots + n^k, y_n = n^{k+1}$，由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{n^{k+1} - (n-1)^{k+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{(k+1)n^k - C_{k+1}^2 n^{k-1} + \cdots} = \frac{1}{k+1},$$

可得原极限 $= \dfrac{1}{k+1}$.

注 1.4　本例也可用定积分的定义求解.

事实上，取 $f(x) = x^k$，将和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{n}\cdot\left(\dfrac{i}{n}\right)^k$ 看做是 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上相应于 n 等分的积分和即可，即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{i}{n}\right)^k = \int_0^1 x^k\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}.$$

由此可以看出，用定积分定义求解本例，不要求 k 为自然数，只要求 $k > 0$ 即可.

例 1.18　设 $\alpha \in \mathbf{R}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha}}$.

解　记 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha+1}, y_n = n\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha} \to \infty\ (n\to\infty)$. 由施图兹定理，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{\alpha+1}}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^{\alpha} + (n+1)^{\alpha+1}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant -1, \\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha+1}\cdot\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{\alpha} + 1}, & \alpha > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant -1, \\ \dfrac{1}{\int_0^1 x^{\alpha}\mathrm{d}x + 1}, & \alpha > -1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \alpha \leqslant -1, \\ \dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}, & \alpha > -1. \end{cases}$$

类题　设 $y_n = \dfrac{x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n}{n(n+1)}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，证明：

(1)当 a 为有限数时,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\dfrac{a}{2}$;　　(2)当 $a=+\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$.

(上海大学).

例 1.19　对于数列 $x_0=a\ \left(0<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$,$x_n=\sin x_{n-1}(n=1,2,\cdots)$.

证明:(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$ (复旦大学).

证明　(1)由不等式 $0<\sin x<x$ $\left(\text{当}x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\text{时}\right)$知,$\{x_n\}$ 单调递减且有下界 0. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 若记为 ξ,则 $\xi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 在等式 $x_n=\sin x_{n-1}$ 两边取极限可得 $\xi=\sin\xi$. 注意到 ξ 的范围知 $\xi=0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

(2)考虑 $nx_n^2=\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_n^2}}$. 分母单调趋向于 $+\infty$,由施图兹定理,

$$\frac{n-(n-1)}{\dfrac{1}{x_n^2}-\dfrac{1}{x_{n-1}^2}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\sin^2x_{n-1}}-\dfrac{1}{x_{n-1}^2}}=\frac{x_{n-1}^2\cdot\sin^2x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2x_{n-1}}.$$

上式右端是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式,将其换成连续变量 t,使用洛必达法则,有

$$\lim_{t\to0}\frac{t^2\sin^2t}{t^2-\sin^2t}=\lim_{t\to0}\frac{t^4}{t^2-\sin^2t}=\lim_{t\to0}\frac{4t^3}{2t-2\sin t\cos t}=\lim_{t\to0}\frac{(2t^3)'}{1-(\sin t\cos t)'}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{6t^2}{2\sin^2t}=3.$$

再由海涅定理知,$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n^2=3$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\dfrac{n}{3}}x_n=1$.

类题 1　设 $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$(浙大).

答案　2.

类题 2　设 $0<x_1<1$,$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$,$n=1,2,\cdots$. 证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$;　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=1$(北师大).

提示　(1)$0<x_{n+1}=x_n(1-x_n)\leqslant\left(\dfrac{x_n+1-x_n}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,即 $0<x_n\leqslant\dfrac{1}{4}$ $(n=2,3,\cdots)$. 且由 $0<\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1-x_n<1$ 知,$\{x_n\}\downarrow$. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$ 存在,易知 $x=0$.

(2)由施图兹定理,

$$\lim_{n\to\infty} nx_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n-1}}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}(1 - x_{n-1}) = 1.$$

六、用泰勒展开求极限

例 1.20　设$f(x) = \int_x^{x^2} \left(1 + \frac{1}{2t}\right)^t \sin\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t(x > 0)$,求$\lim_{n\to\infty} f(n) \cdot \sin\frac{1}{n}$(解放军信息工程大学).

解　令$u = \frac{1}{\sqrt{t}}$,则$\mathrm{d}t = -\frac{2}{u^3}\mathrm{d}u$,

$$f(x) = 2\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{u^2}{2}\right)^{\frac{1}{u^2}} \frac{\sin u}{u^3}\mathrm{d}u.$$

因为

$$\sin u = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + o(u^5),$$

所以

$$\frac{\sin u}{u^3} = \frac{1}{u^2} - \frac{1}{6} + \frac{u^2}{120} + o(u^2)(u \to 0^+).$$

记$g(u) + \left(1 + \frac{u^2}{2}\right)^{\frac{1}{u^2}}$,对固定的$n$,在$\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$上应用第一积分中值定理,有

$$f(n) = 2g(\xi_n)\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{6} + \frac{u^2}{120} + o(u^2)\right)\mathrm{d}u,$$

其中$\xi_n \in \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$. 通过计算可得

$$f(n) = 2g(\xi_n)\left(-\sqrt{n} + n + \frac{1}{6\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)(n \to \infty).$$

故　$\lim_{n\to\infty} f(n)\sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left[2g(\xi_n)\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} + 1 + \frac{1}{6n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right)\right] = 2\mathrm{e}^2.$

类题　设$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1} - 2x) = \beta$,其中$\beta \neq 0, \infty$,求$\alpha, \beta$(复旦大学).

提示　作泰勒展开式,

$$
\begin{aligned}
& x^{\alpha}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}-2x) \\
=\ & x^{\alpha}\left[x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-2x\right] \\
=\ & x^{\alpha}\left[x+\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)+x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)-2x\right] \\
=\ & x^{\alpha}\left[-\frac{1}{4x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right] \\
=\ & -\frac{1}{4x^{3-\alpha}}+o\left(\frac{1}{x^{3-\alpha}}\right) \quad (x\to+\infty).
\end{aligned}
$$

当 $\alpha=3$ 时,原式 $=-\frac{1}{4}+o(1)\to-\frac{1}{4}=\beta$ $(x\to+\infty)$.

例 1.21 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi \mathrm{e}\cdot n!)$(河南大学).

解 因为 $\mathrm{e}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+2)!}$ $(0<\theta<1)$,

所以 $2\pi \mathrm{e}n!=2\pi N+\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)$,$N$ 为正整数,

从而
$$
\begin{aligned}
n\sin(2\pi \mathrm{e}n!) &= n\sin\left(2\pi N+\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\to 2\pi \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

类题 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\tan\sqrt{n^2+1}\pi$.

提示 (1)
$$
\begin{aligned}
\left|\sin\sqrt{n^2+1}\pi\right| &= \left|\sin\sqrt{n^2+1}\pi-\sin n\pi\right| \\
&= \left|2\cos\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{2}\pi\cdot\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{2}\pi\right|\leqslant(\sqrt{n^2+1}-n)\pi \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\to 0 \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

或利用泰勒展开式.

因为 $\sqrt{n^2+1}=n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}=n\left[1+\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$,

所以 $\left|\sin\sqrt{n^2+1}\pi\right|=\left|\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right|$

$$= \left|(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right|$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \frac{\pi}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(2) $n\tan\sqrt{n^2+1}\pi = n\tan(\sqrt{n^2+1} - n)\pi$

$$= n\tan\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \sim n\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n} \to \frac{\pi}{2} \quad (n \to \infty).$$

(2)问也可用泰勒展开式求解,请同学们试一试.

例 1.22　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x) - \sin(\sin x)}{\tan x - \sin x}$ (中科院).

解　由 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

可得
$$\tan(\tan x) = \tan\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\sin(\sin x) = \sin\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

于是,原极限 $= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^3)} = 2.$$

类题 1　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^4}[\ln(1+\sin^2 x) - 6(\sqrt[3]{2-\cos x} - 1)]$ (北京大学).

提示　用泰勒展开,

由 $\sin^2 x = \left[x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right]^2$, 可得

$$\ln(1+\sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

$$\sqrt[3]{2-\cos x}=\sqrt[3]{1+2\sin^2\frac{x}{2}}=1+\frac{x^2}{6}-\frac{1}{24}x^4+o(x^4).$$

由此易得原极限 $=-\frac{7}{12}$.

类题 2 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$（中科大）.

提示 $e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\left[\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{e}\right]^x=e^{x[x\ln(1+\frac{1}{x})-1]}$

$$=e^{x\{x[\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})]-1\}}\to e^{-\frac{1}{2}}\quad(x\to+\infty).$$

类题 3 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1$，求 $\lim\limits_{x\to0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

提示 由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=1$ 知，$f(x)=x^2+o(x^2)(x\to0)$，故

$$\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=[1+(x+o(x))]^{\frac{1}{x+o(x)}\cdot\frac{x+o(x)}{x}}\to e\quad(x\to0).$$

类题 4 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos2t}{4t^2}dt$.

提示 由 $0<t\leqslant1$ 可知，$1-2t^2\leqslant\cos2t\leqslant1$，所以

$$\frac{1}{4t^2}-\frac{1}{2}\leqslant\frac{\cos2t}{4t^2}\leqslant\frac{1}{4t^2}.$$

于是，有

$$\frac{1}{4}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{2n^2}\leqslant\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\cos2t}{4t^2}dt\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{4n}.$$

由夹逼定理可知，原极限 $=\frac{1}{4}$.

七、用中值定理求极限

例 1.23 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解 取 $f(t)=\sin\ln(1+t)$，对 $f(t)$ 在 $\frac{1}{x}$ 与 $\frac{3}{x}$ 所构成的区间上应用拉格朗日中值定理：

$$\sin\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)-\sin\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= [\sin \ln(1+t)]' \Big|_{t=\xi} \cdot \frac{2}{x}.$$

$$= \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1+\xi} \cos \ln(1+\xi), \quad \text{其中} \xi \text{在} \frac{1}{x} \text{与} \frac{3}{x} \text{之间.}$$

于是,原极限 $= \lim\limits_{x\to\infty} x \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{1+\xi} \cos \ln(1+\xi) = 2.$

本例亦可用下面的做法.

$$\text{原极限} = \lim_{x\to\infty} x \sin \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \lim_{x\to\infty} x \sin \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{3}{x}\right) - \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{3}{x} - \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 2.$$

注 1.5　这种做法的前提是分开后两项的极限都存在. 此外,我们还使用了无穷小量的等价量替换.

类题 1　$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 [\ln \arctan(x+1) - \ln \arctan x]$.

提示　原极限 $= \frac{2}{\pi}$.

类题 2　计算极限 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$(苏州大学).

提示　用微分中值定理或泰勒展开. **答案**　1.

例 1.24　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 x^n \sqrt{x+3}\,dx$.

解　由第一积分中值定理,原极限 $= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\xi+3} \cdot \int_0^1 x^n dx$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sqrt{\xi+3} = 0, \quad \text{其中} \xi \in [0,1].$$

本例亦可用迫敛性定理求解,请同学们自己完成.

八、两个重要极限·洛必达法则

第一重要极限:$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 可理解为 $\lim\limits_{\square\to 0} \frac{\sin\square}{\square} = 1$;

第二重要极限:$\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ 可理解为 $\lim\limits_{\square\to\infty} \left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square} = e$ 或 $\lim\limits_{\square\to 0} (1+\square)^{\frac{1}{\square}} = e$,其本质是 $(1+\text{无穷小})^{\frac{1}{\text{无穷小}}}$.

洛必达法则是处理不定式极限非常有效的手段. 但它只能直接用于 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式,而对于 $0\cdot\infty$ 、∞^0、0^0、1^∞ 及 $\infty-\infty$ 型的不定式必须通过变形化成 $\frac{0}{0}$或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的不定式后方可使用洛必达法则. 对 1^∞ 型的不定式亦可考虑用第二个重要极限来处理.

在求不定式极限时,常用无穷小量的等价量替换(仅限于乘积或商运算中使用)来简化运算.

当 $x\to 0$ 时, $x\sim\sin x\sim\arcsin x\sim\tan x\sim\arctan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1$, $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$, $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, $a^x-1\sim x\ln a$, 其中 $a>0$ 且 $a\neq 1$, $\alpha\neq 0$ 为常数.

例 1.25 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{2^n(2n+1)!}t^{2n+1}\mathrm{d}t-\dfrac{x^2}{2}}{x^3(\sqrt[3]{1+x}-e^x)}$.

解 先求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}$ 之和.

事实上,
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2^n(2n+1)!}=\sqrt{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^{2n+1}$$
$$=\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

注意到
$$x^3(\sqrt[3]{1+x}-e^x)=x^3\left[\left(1+\frac{1}{3}x+o(x)\right)-(1+x+o(x))\right]$$
$$=-\frac{2}{3}x^4+o(x^4)\quad(x\to 0^+),$$

我们有
$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t-\frac{x^2}{2}}{-\frac{2}{3}x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}-x}{-\frac{8}{3}x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos\frac{x}{\sqrt{2}}-1}{-8x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{-8x^2}=\frac{1}{32}.$$

例 1.26 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{x^x-1}$ (同济大学).

解　先求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$. 为此令 $y = x^x$, 取对数得 $\ln y = x\ln x$. 而

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0,$$

故

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1.$$

再令 $z = x^{x^x-1}$, 则 $\ln z = (x^x - 1)\ln x$.

而

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x-1)\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x-1}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^x(\ln x+1)}{-\frac{1}{x\ln^2 x}}$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x^x(\ln x+1)\cdot x\ln^2 x$$

$$= -\lim_{x\to 0^+} x(\ln x+1)\ln^2 x. \tag{1}$$

由于

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln^2 x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln^2 x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{2\frac{1}{x}\ln x}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= -4\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = -4\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= 8\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} = 0,$$

和

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}(\ln x+1) = 0.$$

所以式(1)的极限等于0,从而原极限 = 1.

类题　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}-1}{x}$　(复旦大学);

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2\ln(1+x)\arcsin x}$　(同济大学);

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}}\cos t\,dt - x}{(e^x-1)^2(1-\cos^2 x)\arctan x}$　(浙江大学).

答案:(1) $-\dfrac{1}{2}$;　(2)0;　(3) $-\dfrac{1}{60}$.

例 1.27　求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^2 - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}\right]$.

解 由等价无穷小量替换和泰勒展开可得

$$\begin{aligned}\text{原极限} &= \mathrm{e}^2 \lim_{n\to\infty} n\left[1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdot \mathrm{e}^{-2}\right]\\ &= \mathrm{e}^2 \lim_{n\to\infty} n\left[1-\mathrm{e}^{2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2}\right]\\ &= \mathrm{e}^2 \lim_{n\to\infty} n\left[2-2n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\\ &= 2\mathrm{e}^2 \lim_{n\to\infty} n^2\left[\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right]=\mathrm{e}^2.\end{aligned}$$

类题 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\sqrt[n]{n}-1)$（河南大学）.

提示 原极限 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\ln n}(\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n}}-1)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{\ln n}{n}=1.$$

类题 2 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2(x^{\frac{1}{n}}-x^{\frac{1}{n+1}})\quad(x>0)$.

提示 $\mathrm{n}^2\left(\mathrm{x}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}-\mathrm{x}^{\frac{1}{\mathrm{n}+1}}\right)=n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}}-1)$

$$=n^2x^{\frac{1}{n+1}}(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{n(n+1)}}-1)$$

$$\sim x^{\frac{1}{n+1}}\cdot n^2\frac{\ln x}{n(n+1)}\to\ln x\quad(n\to\infty).$$

例 1.28 选择题：设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq0$，则必有（　　）（数学Ⅰ，Ⅱ）.

（A）$b=4d$；（B）$b=-4d$；（C）$a=4c$；（D）$a=-4c$.

解 由于当 $x\to0$ 时，$a\tan x\sim ax$，$b(1-\cos x)\sim\dfrac{1}{2}bx^2$，

$$c\ln(1-2x)\sim-2cx,\ d(1-\mathrm{e}^{-x^2})\sim dx^2,$$

所以

$$a\tan x+b(1-\cos x)\sim a\tan x\sim ax,$$

$$c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})\sim c\ln(1-2x)\sim-2cx,$$

因此

$$\lim_{x\to0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=\lim_{x\to0}\frac{ax}{-2cx}=-\frac{a}{2c}=2,$$

故得 $a=-4c$，应选（D）.

例 1.29 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

解 该题无论是化成 $\dfrac{0}{0}$ 型还是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式，都非常复杂，但用等价无穷小

量替换可使问题简化.

因为 $\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=\ln\left(1+\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)\sim\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$$=\frac{2}{(x+\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}$$

$$\sim\frac{2}{2x\cdot 2x}=\frac{1}{2x^2}\quad(x\to\infty),$$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\ln\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\sim\frac{2}{x-1}\quad(x\to\infty),$$

所以原极限 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}\left(\dfrac{2}{x-1}\right)^{-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x^2}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{8}$.

例 1.30　求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x[1+f(t-\sin t+1,\sqrt{1+t^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+t^3)}}\mathrm{d}t$,其中二元函数 $f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数,且满足 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$,$f(1,2)=0$,$f_u(1,2)=3$.

解　由洛必达法则,可得

$$I=\lim_{x\to 0}[1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)]^{\frac{1}{\ln(1+x^3)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1))}{\ln(1+x^3)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}},\tag{1}$$

这是应用了 $\lim\limits_{x\to 0}f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)=f(1,2)=0$ 和 $\ln(1+x)\sim x(x\to 0)$. 而

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f_u(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)(1-\cos x)+f_v(x-\sin x+1,\sqrt{1+x^3}+1)\dfrac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}}{3x^2}$$

$$=f_u(1,2)\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}+f_v(1,2)\lim_{x\to 0}\frac{1}{2\sqrt{1+x^3}}$$

$$=\frac{1}{6}f_u(1,2)+\frac{1}{2}f_v(1,2).\tag{2}$$

在 $f(tu,tv)=t^2f(u,v)$ 两边分别关于 t 求导得

$$f_u(tu,tv)u+f_v(tu,tv)v=2tf(u,v).$$

在上式中,令 $t=1,u=1,v=2$,并注意到 $f_u(1,2)=3$ 可得

$$f_v(1,2) = -\frac{3}{2}.$$

由(1)、(2)两式,有

$$I = e^{\frac{1}{6}f_u(1,2)+\frac{1}{2}f_v(1,2)} = e^{-\frac{1}{4}}.$$

例 1.31 求极限 $I = \lim\limits_{t\to 0^+}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}du\int_{u^2}^{t}\sin y^2dy}{\left[\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x-1\right]\arctan t^{\frac{3}{2}}}$.

解 先计算 $J = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)^x$.

因为 $J = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right)}$,

而

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[1+\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}-1\right)\right]}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{\pi}\arctan\frac{x}{t^2}-1}{\frac{1}{x}} = -\frac{2}{\pi}t^2,$$

所以

$$I = \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}du\int_{u^2}^{t}\sin y^2dy}{(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}.$$

交换累次积分的顺序,可得

$$\int_0^{\sqrt{t}}du\int_{u^2}^{t}\sin y^2dy = \int_0^{t}dy\int_0^{\sqrt{y}}\sin y^2du = \int_0^{t}\sqrt{y}\sin y^2dy.$$

如图 1-1 所示,$D = \{(u,y)\mid u^2\leqslant y\leqslant t, 0\leqslant u\leqslant\sqrt{t}\}$ 表示积分区域.

由于

$$(e^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}} \sim -\frac{2}{\pi}t^2\times t^{\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}} \quad (t\to 0^+),$$

所以

$$I = \lim_{t\to 0^+}\frac{\int_0^{t}\sqrt{y}\sin y^2dy}{-\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}$$

$$= -\frac{\pi}{7}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sqrt{t}\sin t^2}{t^{\frac{5}{2}}} = -\frac{\pi}{7}.$$

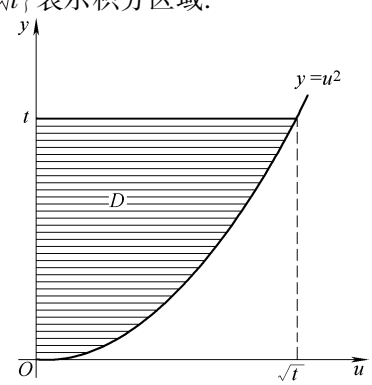


图 1-1 例 1.30 图

九、用定积分的定义求极限

若$f(x)$在$[a,b]$上可积,则对$[a,b]$的任一分割

$T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$及任意介点$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,都有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$\|T\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.

例 1.32　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)}$.

解　记$a_n=\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}(n+k)}=\sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n}\right)}$,则

$\ln a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$. 它可看做$f(x)=\ln(1+x)$在$[0,1]$上对应于$n$等分割$T$及介点$\xi_k=\dfrac{k}{n}$的积分和,于是

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\ln a_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\\&=\int_0^1\ln(1+x)\,\mathrm{d}x=2\ln 2-1,\end{aligned}$$

故　　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\mathrm{e}^{2\ln 2-1}=\dfrac{4}{\mathrm{e}}$.

在许多场合,我们并不能像例1.32那样将所求的极限直接化成某个函数的积分和,而要用“无穷小分析”的方法,将所给题目的被加项用与之等价的无穷小量来替代,然后再化成某个函数的积分和. 下面看两个例子.

例 1.33　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^6+n}}+\dfrac{2^2}{\sqrt{n^6+2n}}+\cdots+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^6+n^2}}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解　(1)　和式中的被加项的通项为$\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}$,易见当$n\to\infty$时,它与$\dfrac{k^2}{n^3}$等价. 用$\dfrac{k^2}{n^3}$代替$\dfrac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}$可得

$$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

(2) 和式中的被加项的通项为 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$,易见,当 $n\to\infty$ 时,它与 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$ 等价.用 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$ 代替 $\dfrac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}}$ 可得

$$\text{原极限} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k}{n}\pi = \int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

注 1.6 对例 1.33 的如上处理,同学们可能感到缺乏理论依据!但如果我们把上述思想细化,大家就会认可了.

对第(1)小题,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}-\frac{k^2}{n^3}\right)\right]$$

$$\triangleq \int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} r_n,$$

而 $|r_n| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^2}{\sqrt{n^6+kn}}-\frac{k^2}{n^3}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^5}}}-1\right)\right|$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^5}}-1\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\cdot\frac{\frac{k}{n^5}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^5}}+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\cdot\frac{1}{n^5} \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^5} = \frac{1}{2n^4}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

对第(2)小题,有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{k\pi}{n}}{n+\frac{1}{k}} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}\pi+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{k}}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n}\right]$$

$$\triangleq \int_0^1 \sin\ \pi x\mathrm{d}x + \lim_{n\to\infty} r_n,$$

而

$$|r_n| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\frac{1}{k}}\right)\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{\left|\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n}\right|}{n\left(n+\frac{1}{k}\right)} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \to 0 \quad (n\to\infty).$$

类题　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \dfrac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \dfrac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

提示　其被加项用 $\dfrac{2^{\frac{k}{n}}}{n}$ 替代. 原极限为 $\dfrac{1}{\ln 2}$.

十、其他

例 1.34　已知 a,b 为两个正数,$a < b$,取 $x_0 = a, x_1 = b$,令 $x_n = \dfrac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$, $n = 2,3,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　这里我们给出一个一般的作法.

将题目中所给的递推关系式视为差分方程,则它的特征方程为 $2r^2 - r - 1 = 0$, 由此解出两个特征根 $r_1 = 1, r_2 = -\dfrac{1}{2}$. 这样,递推关系中的 x_n 具有如下形式:

$$x_n = \lambda \cdot 1^n + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad \text{其中 } \lambda,\mu \text{ 待定.}$$

由 $a = x_0 = \lambda + \mu, b = x_1 = \lambda - \dfrac{\mu}{2}$, 求得

$$\lambda = \frac{a+2b}{3}, \mu = \frac{2}{3}(a-b).$$

于是

$$x_n = \frac{a+2b}{3} + \frac{2}{3}(a-b)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

易见 $x_n \to \dfrac{a+2b}{3}$ $(n\to\infty)$.

类题　给定序列 $x_0 = a, x_1 = 1 + bx_0, \cdots, x_{n+1} = 1 + bx_n, \cdots$, 问: a,b 为何值时 $\{x_n\}$ 收敛?

提示　假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 存在,则 $A = 1 + bA, A = \dfrac{1}{1-b}$. 令 $u_n = x_n - \dfrac{1}{1-b}$,

则 u_n 满足 $u_{n+1} = bu_n$. 它的特征方程为 $r^2 - br = 0$,特征根为 $r_1 = 0, r_2 = b$. 于是

$$u_n = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot b^n = \mu b^n.$$

由此可得 $\mu = \dfrac{a(1-b)-1}{1-b}$,故 $u_n = \dfrac{a(1-b)-1}{1-b} \cdot b^n$.

易见当 $|b| < 1$ 时,对任意的 a,$u_n \to 0 (n \to \infty)$,从而 $x_n \to \dfrac{1}{1-b}$ $(n \to \infty)$.

例 1.35 设 $x_1 = a, x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 (n = 1,2,\cdots)$. 求使得数列 $\{x_n\}$ 收敛的所有实数 a,并证明你的结论(清华大学).

解 假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 存在,则 $A = A^2 + 3A + 1, A = -1$. 由 $x_{n+1} - x_n = (x_n + 1)^2 \geqslant 0$ 知,$\{x_n\} \uparrow$. 因此,欲使 $\{x_n\}$ 收敛,必须要求 $a \leqslant -1$.

记 $f(a) = a^2 + 3a + 1$,让 $f(a) \leqslant -1$ 可解出 $-2 \leqslant a \leqslant -1$. 并且易知,当 $-2 \leqslant a \leqslant -1$ 时,$-\dfrac{5}{4} \leqslant f(a) \leqslant -1$. 由此,当 $-2 \leqslant a \leqslant -1$ 时,$\{x_n\}$ 有界,故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

综上知,当 $a > -1$ 或 $a < -2$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不存在;

当 $-2 \leqslant a \leqslant -1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在且极限为 -1.

例 1.36 设 $f(0) = 0$,$f'(0)$ 存在,令

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right),$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由 $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}$, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x \in (0,\delta)$ 时,有

$$x(f'(0) - \varepsilon) < f(x) < x(f'(0) + \varepsilon).$$

将 n 适当大,依次取 $x = \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{2}{n^2}, \cdots, \dfrac{n}{n^2}$,则有

$$\frac{1}{n^2}(f'(0) - \varepsilon) < f\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{1}{n^2}(f'(0) + \varepsilon),$$

$$\frac{2}{n^2}(f'(0) - \varepsilon) < f\left(\frac{2}{n^2}\right) < \frac{2}{n^2}(f'(0) + \varepsilon),$$

$$\vdots$$

$$\frac{n}{n^2}(f'(0) - \varepsilon) < f\left(\frac{n}{n^2}\right) < \frac{n}{n^2}(f'(0) + \varepsilon),$$

将上面的不等式相加,得

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}(f'(0) - \varepsilon) < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}(f'(0) + \varepsilon).$$

易知，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}f'(0)$.

类题 1　求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{n^2}+\sin\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\sin\dfrac{n}{n^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

类题 2　设$f(x)$为定义在$(0,1)$内的函数，且满足

1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$;　　2)$f(x)-f\left(\dfrac{x}{2}\right)=o(x)(x\to0)$. 证明：$f(x)=o(x)$，即证：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

提示　由条件2)，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$0<x<\delta$时，

$$\left|\frac{f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)}{x}\right|<\varepsilon,\text{即}\left|f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)\right|<|x|\varepsilon.$$

而$\forall n>1$，$\left|f(x)-f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right|=\left|\sum\limits_{k=1}^{n}\left[f\left(\dfrac{x}{2^{k-1}}\right)-f\left(\dfrac{x}{2^k}\right)\right]\right|$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}|x|\varepsilon\leqslant2\varepsilon|x|,$$

故

$$|f(x)|\leqslant\left|f\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|+2\varepsilon|x|.$$

固定x，令$n\to\infty$，由条件1)知，$|f(x)|\leqslant2\varepsilon|x|$，即

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant2\varepsilon.$$

类题 3　已知$f(x)$是定义在$[0,1]$上的函数，$f(0)=0$且$f'_+(0)$存在. 试证明：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)=f'_+(0)\ln2.$$

(川大).

提示　由$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$，$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当$x\in(0,\delta)$时，有

$$x(f'_+(0)-\varepsilon)<f(x)<x(f'_+(0)+\varepsilon).$$

对适当大的n，由上式，有

$$\frac{1}{n+k}(f'_+(0)-\varepsilon)<f\left(\frac{1}{n+k}\right)<\frac{1}{n+k}(f'_+(0)+\varepsilon),k=1,2,\cdots,n.$$

将上述不等式相加，可得

$$(f'_+(0)-\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)<(f'_+(0)+\varepsilon)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln 2$,利用夹逼定理,并注意到 $\varepsilon>0$ 的任意性可得结论.

例 1.37 设 $0<x_n<+\infty$,且满足 $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$. 证明:$\{x_n\}$ 的极限存在,并求出其极限值.

证明 已知 $x_n>0$,即 $\{x_n\}$ 有下界. 又由

$$2\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}\leqslant x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$$

可推出 $\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$,即 $\{x_n\}$ 单调递减. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,记为 a,则 $a\geqslant 0$.

若 $a=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=+\infty$. 在不等式 $x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$ 两边,令 $n\to\infty$ 可知,$+\infty\leqslant 2$,矛盾. 由此可见 $a>0$. 再在不等式

$$2\sqrt{\frac{x_{n+1}}{x_n}}\leqslant x_{n+1}+\frac{1}{x_n}<2$$

中,令 $n\to\infty$,可得 $2\sqrt{\frac{a}{a}}\leqslant a+\frac{1}{a}\leqslant 2$,即 $a+\frac{1}{a}=2$,解之得 $a=1$.

例 1.38 设数列 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 满足:

$$a_{n+1}=b_n-\frac{na_n}{2n+1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

证明:(1) 若 $\{b_n\}$ 有界,则 $\{a_n\}$ 也有界;(2) 若 $\{b_n\}$ 收敛,则 $\{a_n\}$ 也收敛(中科院).

证明 (1) 由已知条件 $\{b_n\}$ 有界知,存在 $M>0$,使得 $|b_n|\leqslant M,\forall n$. 由递推关系式可知,

$$|a_2|\leqslant M+\frac{1}{2}|a_1|;$$

$$|a_3|\leqslant M+\frac{1}{2}|a_2|\leqslant M\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2^2}|a_1|;$$

$$|a_4|\leqslant M+\frac{1}{2}|a_3|\leqslant M\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^3}|a_1|;$$

$$\vdots$$

$$|a_n|\leqslant M+\frac{1}{2}|a_{n-1}|\leqslant M\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}}|a_1|\leqslant 2M+|a_1|,\forall n.$$

由此可知,$\{a_n\}$有界.

(2) 设$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$,则$\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$,当$n>N_1$时,有$|b_n-b|<\varepsilon,\dfrac{|b|}{6n}<\varepsilon$.

于是有

$$\begin{aligned}\varepsilon>|b_n-b|&=\left|a_{n+1}+\frac{n}{2n+1}a_n-b\right|\\&=\left|\left(a_{n+1}-\frac{2}{3}b\right)+\frac{n}{2n+1}\left(a_n-\frac{2n+1}{3n}b\right)\right|\\&\geqslant\left|a_{n+1}-\frac{2}{3}b\right|-\frac{n}{2n+1}\left|a_n-\frac{2n+1}{3n}b\right|,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\left|a_{n+1}-\frac{2}{3}b\right|<\varepsilon+\frac{n}{2n+1}\left|a_n-\frac{2n+1}{3n}b\right|\\&\leqslant\varepsilon+\frac{1}{2}\left|a_n-\frac{2}{3}b\right|+\frac{|b|}{6n}\leqslant 2\varepsilon+\frac{1}{2}\left|a_n-\frac{2}{3}b\right|\\&\leqslant 2\varepsilon+\frac{1}{2}\left(2\varepsilon+\frac{1}{2}\left|a_{n-1}-\frac{2}{3}b\right|\right)=2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2^2}\left|a_{n-1}-\frac{2}{3}b\right|\\&\leqslant 2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)+\frac{1}{2^3}\left|a_{n-2}-\frac{2}{3}b\right|\\&\leqslant\cdots\\&\leqslant 2\varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-N_1}}\right)+\frac{1}{2^{n-N_1+1}}\left|a_{N_1}-\frac{2}{3}b\right|\\&\leqslant 4\varepsilon+\frac{1}{2^{n-N_1+1}}\left|a_{N_1}-\frac{2}{3}b\right|.\end{aligned}$$

对上述$\varepsilon>0,\exists N>N_1>0$,当$n>N$时,可使$\dfrac{1}{2^{n-N_1+1}}\left|a_{N_1}-\dfrac{2}{3}b\right|<\varepsilon$. 从而,当$n>N$时,有$\left|a_{n+1}-\dfrac{2}{3}b\right|<5\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}b$.

注　如果利用下面的命题,则可简化我们的证明.

命题　设$\{x_n\},\{y_n\}$是两个数列,若$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$存在,则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n,$$
$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\lim_{n\to\infty}y_n.$$

(2) 在等式$a_{n+1}=b_n-\dfrac{na_n}{2n+1}$两边分别取上、下极限可得:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\frac{2}{3}b=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n.$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}b$.

例 1.39 设非负数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{m+n} \leqslant a_n a_m$,对一切正整数 m,n 都成立. 证明:数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛.

证明 用上、下极限的方法证明. 先证数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 有界.

由 $a_n \leqslant a_{n-1}a_1 \leqslant a_{n-2}a_1^2 \leqslant \cdots \leqslant a_1^n$ 可得

$$0 \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant a_1,$$

即数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 有界.

再证 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

若有某项 $a_m = 0$, 则容易看出对一切 $n > m$ 都有 $a_n = 0$, 此时显然数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛. 不妨设 $a_n > 0$. 令 $l = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$,则 $0 \leqslant l \leqslant a_1$,取子列 $\{\sqrt[n_k]{a_{n_k}}\}$ 使其收敛于 l,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 > 0$,当 $k \geqslant k_0$ 时,有

$$l - \varepsilon < \sqrt[n_k]{a_{n_k}} < l + \varepsilon.$$

而对 $\forall n > n_{k_0}$,有 $n = qn_{k_0} + \gamma$,其中 $q \geqslant 1, 0 \leqslant \gamma < n_{k_0}$. 注意到

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{qn_{k_0} + \gamma} = \frac{1}{qn_{k_0}} s_n,$$

其中 $s_n = \dfrac{qn_{k_0}}{n} \to 1$(当 $n \to \infty$ 时). 定义 $a_0 = 1$, 则有

$$\begin{aligned} a_n^{\frac{1}{n}} &\leqslant a_{qn_{k_0}}^{\frac{1}{n}} \cdot a_\gamma^{\frac{1}{n}} \leqslant (a_{n_{k_0}}^q)^{\frac{s_n}{qn_{k_0}}} \cdot a_\gamma^{\frac{1}{n}} \\ &= (\sqrt[n_{k_0}]{a_{n_{k_0}}})^{s_n} \cdot a_\gamma^{\frac{1}{n}} < (l+\varepsilon)^{s_n} \cdot a_\gamma^{\frac{1}{n}} \quad (n > n_{k_0}), \end{aligned}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_\gamma^{\frac{1}{n}} = 1$, 所以上式右端的极限为 $l + \varepsilon$, 从而有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n^{\frac{1}{n}} \leqslant l + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$.

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$, 即数列 $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ 收敛.

类题 1 设 $\{a_n\}$ 是正数列,若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$,证明: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} = 1$(大连理工).

提示 由 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 可知,存在子列 $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{a_{n_k}} = 1$. 欲证明结论成立,只需证明: $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt[n_k]{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_k}} = 1$ 即可. 不失一般性,假设 $\{a_n\}$ 的子列就是它本身.

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ 可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $(1-\varepsilon)^n < a_n < (1+\varepsilon)^n$. 对固定的 N,有

$$1 - \varepsilon < (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^{\frac{1}{n}} = (a_1 + \cdots + a_N + a_{N+1} \cdots + a_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$<(M+(n-N)(1+\varepsilon)^n)^{\frac{1}{n}}<(1+\varepsilon)(M+n-N)^{\frac{1}{n}}<(1+\varepsilon)(M+n)^{\frac{1}{n}},$$

其中 $M=a_1+\cdots+a_N$ 是个常数. 注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}(M+n)^{\frac{1}{n}}=1$,在上式中令 $n\to\infty$,由 ε 的任意性,可得: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1+a_2+\cdots+a_n}=1$.

类题 2　设非负数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$, $\forall m,n\in\mathbf{N}_+$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\inf_n\left\{\frac{a_n}{n}\right\}.$$

提示　由 $0\leqslant a_n\leqslant na_1$ 知,数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 有界,设 $\alpha=\inf\limits_n\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists m$, 使

$$\alpha\leqslant\frac{a_m}{m}<\alpha+\varepsilon.$$

$\forall n>m$,有 $n=mq_n+\gamma_n$, $0\leqslant\gamma_n\leqslant m-1$. 于是有

$$\alpha\leqslant\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{a_m}{m}\cdot\frac{mq_n}{mq_n+\gamma_n}+\frac{a_{\gamma_n}}{mq_n+\gamma_n}<(a+\varepsilon)\frac{mq_n}{mq_n+\gamma_n}+\frac{a_{\gamma_n}}{mq_n+\gamma_n}.$$

定义 $a_0=0$,由 γ_n 和 a_{γ_n} 的有界性,令 $n\to\infty$ 可得

$$\alpha\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_n}{n}\leqslant\alpha+\varepsilon.$$

由 ε 的任意性可知,结论成立.

例 1.40　(1)设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A$　($a>0$ 且 $a\neq1$),

求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$;

(2)设 $f(x)$ 是三次多项式,且有

$$\lim_{x\to2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1\quad(a\neq0),$$

求 $\lim\limits_{x\to3a}\dfrac{f(x)}{x-3a}$.

解　(1)由假设可知, $\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{a^x-1}=A+\alpha$, 其中 α 为 $x\to0$ 时的无穷小量.

而

$$a^x-1=\mathrm{e}^{x\ln a}-1\sim x\ln a\quad(x\to0),$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)\sim A\ln a\cdot x+\alpha\ln a\cdot x\quad(x\to0),$$

进而

$$\frac{f(x)}{x}\sim A\ln a\cdot x+\alpha\ln a\cdot x\quad(x\to0),$$

从而 $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{A\ln a\cdot x+\alpha\ln a\cdot x}{x}=A\ln a.$$

(2)由已知条件可知,$x-2a$,$x-4a$ 都是 $f(x)$ 的因子,故可令 $f(x)=A(x-2a)(x-4a)(x-B)$,其中 A,B 待定.

于是有 $$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=-2Aa(2a-B)=1,\tag{1}$$

$$\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=2Aa(4a-B)=1,\tag{2}$$

联立(1)、(2)求解得 $A=\frac{1}{2a^2}$,$B=3a$,

即 $$f(x)=\frac{1}{2a^2}(x-2a)(x-3a)(x-4a),$$

故 $$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}=-\frac{1}{2}.$$

例 1.41 对任意的正整数 n,则 $x+x^2+\cdots+x^n=1$ 在 $[0,1]$ 上必有且只有一个根,记为 x_n,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(北师大).

解 令 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$,则显然 $f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调递增. 注意到 $f_n(0)=-1<0$,$f_n(1)=n-1>0(n>1)$,由连续函数的介值定理知,$f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一实根 x_n,即 $f_n(x_n)=0$. 又由

$$f_{n+1}(x_n)=x_n^{n+1}+f_n(x_n)=x_n^{n+1}>0,$$

且因为 $f_{n+1}(x_{n+1})=0$,即 $f_{n+1}(x_n)>f_{n+1}(x_{n+1})$,$f_{n+1}(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且严格单调递增,所以,$x_{n+1}<x_n$,且 $0<x_n<1$ $(n>1)$. 由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 存在.

而 $f_n(x_n)=\frac{x_n(1-x_n^{n+1})}{1-x_n}-1=0$,令 $n\to\infty$ 可得

$$\frac{a}{1-a}-1=0,\text{即 }a=\frac{1}{2}.$$

例 1.42 证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=0$(上海交大).

证法 1 $\forall\varepsilon>0,(0<\varepsilon<1)$,则

$$\begin{aligned}0<I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\sin^n x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x\\&<\sin^n\xi\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)+\varepsilon\\&<\frac{\pi}{2}\sin^n\xi+\varepsilon,\quad\text{其中 }\xi\in\left[0,\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right].\end{aligned}$$

只要 n 充分大,就可使 $0<I_n<2\varepsilon$.

证法 2　由递推法,可得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n = 2k+1, \\ \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n = 2k, \end{cases} \quad (k = 1,2,\cdots).$$

余下的分别就 $n = 2k$ 和 $n = 2k+1$, 利用例 1.11 的方法可证: $I_{2k} \to 0$ 和 $I_{2k+1} \to 0$ $(k \to \infty)$.

注 1.7　本例不能直接使用积分中值定理. 因为中值点 ξ_n 依赖于 n, 如果当 $n \to \infty$ 时, $\xi_n \to \dfrac{\pi}{2}$,则 $\sin^n \xi_n$ 就成为 1^∞ 型不定式,这样估计它的极限是十分困难的!

例 1.43　若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,对任意的正整数 n,令

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \quad (k = 0,1,\cdots,n),$$

$$r(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

证明:

$$\lim_{n\to\infty} nr(n) = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

证明　将 $r(n)$ 改写:

$$\begin{aligned} r(n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x_k) - f(x)]\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)f'(\xi_k)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\xi_k \in [x_{k-1},x_k] = \Delta_k$. 记

$$M_k = \sup_{x\in\Delta_k}\{f'(x)\}, m_k = \inf_{x\in\Delta_k}\{f'(x)\},$$

由于

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} (x_k - x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2,$$

所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant r(n) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n} M_k,$$

而

$$\frac{1}{2}(b-a)\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \leqslant nr(n) \leqslant \frac{1}{2}(b-a)\cdot\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} M_k.$$

注意到 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性,令 $n \to \infty$ 可得

$$\lim_{n\to\infty} nr(n) = \frac{b-a}{2}\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(b) - f(a)].$$

最后,我们给出利用重要概念和理论证明极限不存在的例子.

例 1.44 设 $x_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,证明:存在无穷多个下标 n,使得对所有的 k,都有 $x_n>x_{n+k}$(大连理工).

证法 1 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 可知,对 $x_1>0$,存在 $N_1>0$,当 $n\geqslant N_1$ 时,有 $x_1>x_n$.

记 $x_{n_1}=\max\{x_n\}$,下证:x_{n_1}是存在的. 事实上,对 $x_{n_1}>0$,存在 $m_1\geqslant N_1$,当 $n\geqslant m_1$ 时,有 $x_n<x_{N_1}$. 取 $c=\max\{x_{N_1},x_{N_1+1},\cdots,x_{m_1-1}\}$,再取 $n_1=\max\{n\mid x_n=c,N_1\leqslant n\leqslant m_1-1\}$ 即可. 于是有 $x_{n_1}>x_{n_1+k},k=1,2,\cdots$.

用 x_{n_1}代替 x_1 的位置,从 x_{n_1}之后重复上述讨论,可以找出 x_{n_2}满足 $x_{n_2}>x_{n_2+k},k=1,2,\cdots$. 如此下去可知,有无穷多个下标 n,满足

$$x_n>x_{n+k},\quad k=1,2,\cdots.$$

证法 2 用反证法. 假设只有有限个下标 n,使得对所有的 k,都有 $x_n>x_{n+k}$. 记这些下标最大的为 N,则当 $n>N$ 时,必存在 $k_0>0$,使得 $x_n\leqslant x_{n+k_0}$.

取 $n_1>N$,则相应地存在 $k_1>0$,使得 $x_{n_1}\leqslant x_{n_1+k_1}$;

取 $n_2=n_1+k_1$,易见 $n_2>N$,则相应地存在 $k_2>0$,使得 $x_{n_2}\leqslant x_{n_2+k_2}$;

$\vdots$

依次取 $n_s=n_{s-1}+k_{s-1}$,则相应地存在 $k_s>0$,使得 $x_{n_s}\leqslant x_{n_s+k_s}$;

如此下去,可得到 $\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_s}\}$单调递增且大于零,这与 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 矛盾.

例 1.45 证明:若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛,则必存在两个子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}$ 与 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 收敛于不同的极限,即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=a,\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=b,a\neq b$.

证明 因为数列 $\{x_n\}$ 有界,由致密性定理,存在子列 $\{x_{n_k}^{(1)}\}\subset\{x_n\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(1)}=a$. 又因为数列 $\{x_n\}$ 发散,所以对上述 a,$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall N>0$,$\exists m_0>N$,使 $|x_{m_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $N=1$,$\exists m_1>1$,使 $|x_{m_1}-a|\geqslant\varepsilon_0$;

取 $N=2$,$\exists m_2>2\quad(m_2>m_1)$,使 $|x_{m_2}-a|\geqslant\varepsilon_0$;

$\vdots$

取 $N=k$,$\exists m_k>k\quad(m_k>m_{k-1})$,使 $|x_{m_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$;

$\vdots$

由此可得一个子列 $\{x_{m_k}\}$ 满足 $|x_{m_k}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

由于数列 $\{x_{m_k}\}$ 有界,所以由致密性定理,它存在一个子列 $\{x_{m_{k_l}}\}$ 记为 $\{x_{n_k}^{(2)}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}^{(2)}=b$. 显然 $|b-a|\geqslant\varepsilon_0$.

例 1.46　试分别按函数极限的 1)定义;2)柯西准则;3)归结原则写出“$f(x)$ 在 $x \to x_0$ 时极限不存在”的正面陈述,并以狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

为例说明当 $x \to 1$ 时, $D(x)$ 的极限不存在.

解　1) $\forall A \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x' \in U^0(x_0, \delta)$, 使得 $|f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0$.

以 $D(x)$ 为例. 若 $A \neq 1$, 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{|1 - A|}{2} > 0, \forall \delta > 0$, 由实数的稠密性,存在有理数 $x' \in U^0(1, \delta)$, 使得 $D(x') = 1$, 从而有

$$|D(x') - A| = |1 - A| \geqslant \frac{|1 - A|}{2} = \varepsilon_0.$$

若 $A = 1$, 则取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}, \forall \delta > 0$,由实数的稠密性,存在无理数 $x' \in U^0(1, \delta)$, 使得 $D(x') = 0$,从而有

$$|D(x') - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

2) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x_1, x_2 \in U^0(x_0, \delta)$,使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geqslant \varepsilon_0.$$

以 $D(x)$ 为例. 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}, \forall \delta > 0$, 由实数的稠密性,在 $U^0(1, \delta)$ 内既存在有理数 x_1,也存在无理数 x_2,且 $D(x_1) = 1, D(x_2) = 0$,从而有

$$|D(x_1) - D(x_2)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon_0.$$

3) $\exists \{x_n\} \subset U^0(x_0), \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$,但 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$ 不存在.

以 $D(x)$ 为例. 已知 $\sqrt{2}$ 为无理数,从而对任何自然数 $n, x_{2n-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{n} + 1$ 也都是无理数,且有 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n-1} = 1$ 和

$$D(x_{2n-1}) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} D(x_{2n-1}) = 0.$$

再取 $x_{2n} = \dfrac{1}{n} + 1$, 显然 $\lim\limits_{n \to \infty} x_{2n} = 1$ 且 $D(x_{2n}) = 1, \lim\limits_{n \to \infty} D(x_{2n}) = 1$. 综上知, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 1$, 但 $\lim\limits_{n \to \infty} D(x_n)$ 不存在.

注 1.8　在 3)中,利用无理数 $\sqrt{2}$ 构造了一个收敛于 1 的无理数数列. 当然也可利用其他无理数,如 $\sqrt{3}, \pi$ 等来构造.

第二讲　一元函数的连续性

在这一讲中,我们将涉及函数的连续性、一致连续性、连续函数的性质及应用等重要内容.

一、函数的连续性及其应用

函数$f(x)$在x_0点连续是指:$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 其本质是"$f$"与"lim"可变换顺序. 要证明函数$f(x)$在区间$I$上连续,只要证明$\forall x_0\in I$,$f(x)$在$x_0$处都连续.

证明函数$f(x)$在x_0点连续,常用的方法:1)用定义;2)用归结原则,即证:$\forall\{x_n\}$且$x_n\to x_0$,都有$f(x_n)\to f(x_0)$.

例 2.1　证明:(1)若函数$f(x)$,$g(x)$连续,则函数$\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}$,$\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}$也连续;

(2)设$f_1(x)$,$f_2(x)$,$f_3(x)$在$[a,b]$上连续,令函数f的值$f(x)$等于三值$f_1(x)$,$f_2(x)$,$f_3(x)$中介于其他二值之间的那个值. 证明f在$[a,b]$上连续;

(3)令

$$u_n(x)=\begin{cases}-n, & \text{当 } x\leqslant -n \text{ 时},\\ x, & \text{当 } -n<x\leqslant n \text{ 时},\\ n, & \text{当 } x>n \text{ 时}.\end{cases}$$

$f(x)$为实函数. 证明:$f(x)$连续的充要条件是$g_n(x)=u_n[f(x)]$对任意固定的n,都是x的连续函数(川大,1981).

证明　(1)$\varphi(x)=\dfrac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$,

$$\psi(x)=\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}.$$

(2)$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)-\max\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}-\min\{f_1(x),f_2(x),f_3(x)\}$,

(3)$g_n(x)=u_n[f(x)]$

$$\begin{aligned}&=-n+f(x)+n-\max\{-n,f(x),n\}-\min\{-n,f(x),n\}\\&=f(x)-\max\{f(x),n\}-\min\{f(x),-n\}\\&=f(x)-\frac{n+f(x)+|f(x)-n|}{2}-\frac{-n+f(x)-|n+f(x)|}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{|n + f(x)| - |f(x) - n|}{2}.$$

由连续函数的运算性质,即知它们都连续.

例 2.2　证明:黎曼(Riemann)函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}, (p \in \mathbf{N}_+, q \in \mathbf{Z}, p \text{ 和 } q \text{ 互质}), \\ 0, & x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

在任一点 x_0 的极限存在,且极限值为 0 . 换言之,一切无理点都是 $R(x)$ 的连续点,而一切有理点都是 $R(x)$ 的(可去)间断点 (南航).

证明　$R(x)$ 是以 1 为周期的函数,所以只要讨论区间 $[0,1]$ 上的函数性质.

注意到 $x = 0$ 可写成 $x = \dfrac{0}{1}$,即 $R(0) = 1$. 所以,在$[0,1]$上,分母为 1 的有理点只有两个:$\dfrac{0}{1}$和$\dfrac{1}{1}$;分母为 2 的有理点只有一个:$\dfrac{1}{2}$;分母为 3 的有理点只有两个:$\dfrac{1}{3}$和$\dfrac{2}{3}$;分母为 4 的有理点只有两个$\dfrac{1}{4}$和$\dfrac{3}{4}$;分母为 5 的有理点只有四个:$\dfrac{1}{5}$,$\dfrac{2}{5}$,$\dfrac{3}{5}$和$\dfrac{4}{5}$;…. 总之,对任意自然数 k, 分母不超过 k 的有理点个数是有限的.

设 $x_0 \in [0,1]$ 是任一点, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $k = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,因为分母不超过 k 的有理点个数有限,设它们为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$. 令 $\delta = \min\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ r_i \neq x_0}} \{|r_i - x_0|\}$, 显然 $\delta > 0$.

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,若 x 为无理数,则 $R(x) = 0$;若 x 为有理数,其分母必大于$\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, 于是

$$R(x) \leqslant \frac{1}{\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1} < \varepsilon,$$

因此成立

$$|R(x) - 0| < \varepsilon.$$

此即表明 $R(x)$ 在 x_0 点的极限为 0($x_0 = 0$ 时是指右极限,$x_0 = 1$ 时是指左极限). 根据 $R(x)$ 的周期性, $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 都有

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0.$$

例 2.3　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,证明函数

$$M(x) = \max_{a \leqslant t \leqslant x} f(t) \text{ 和 } m(x) = \min_{a \leqslant t \leqslant x} f(t)$$

也在 $[a,b]$ 上连续.

证明　$\forall x_0 \in [a,b]$. 由于 $f(x)$ 连续,所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 只要 $x_0 + h \in [a,b]$ 且 $|h| < \delta$, 就有

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故有
$$\sup_{|h|<\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon.$$

而 $M(x_0+h)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant x_0+h}f(t)\leqslant\max\limits_{a\leqslant t\leqslant x_0}f(t)+\sup\limits_{|h|<\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|$,

$$M(x_0+h)\geqslant\max_{a\leqslant t\leqslant x_0}f(t)-\sup_{|h|<\delta}|f(x_0+h)-f(x_0)|,$$

从而 $|M(x_0+h)-M(x_0)|\leqslant\varepsilon$, 即 $M(x)$ 在$[a,b]$ 上连续.

同理可证函数 $m(x)$ 在$[a,b]$ 上连续.

类题 设$f(x)$ 单调不减,证明:函数$f(x-0)$ 左连续.

提示 设 $\Phi(x)=f(x-0)=\sup\limits_{t<x}\{f(t)\}$,则 $\Phi(x)\leqslant f(x)$ 且 $\Phi(x)$ 单调不减.

固定 x, $\forall\varepsilon>0$, $\exists t_0$, 使

$$\Phi(x)-\varepsilon<f(t_0)\leqslant\Phi(x)\leqslant f(x),$$

(上式最左边的不等式用到了上确界的定义). 故当 $t_0<t<x$ 时,

$$f(t_0)\leqslant f(t)\leqslant\Phi(x),\ f(t_0)\leqslant\Phi(t)\leqslant\Phi(x),$$

即当 $t\in(t_0,x)$ 时,有

$$\Phi(x)-\varepsilon\leqslant\Phi(t)\leqslant\Phi(x),$$

或
$$|\Phi(t)-\Phi(x)|\leqslant\varepsilon,$$

故 $\Phi(x)$ 在点 x 左连续.

例 2.4 设$f(x)=\left[\dfrac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$, 指出$f(x)$ 的所有间断点,并讨论它们的类型.

解 $f(x)$可能的间断点为 $x=0,\pm\dfrac{1}{k},\pm\dfrac{1}{\sqrt{k}},k=1,2,\cdots$.

对 $x=0$,取 $x_n'=\dfrac{2}{4n+1},x_n''=\dfrac{2}{4n+3}$,则当 $n\to\infty$ 时,$x_n'\to0,x_n''\to0$,但

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=\lim_{n\to\infty}(4n^2+2n)=+\infty,$$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n'')=-\lim_{n\to\infty}(4n^2+6n+2)=-\infty,$$

故 $x=0$ 为第二类间断点;

对 $x=\dfrac{1}{k}$,由于$f\left(\dfrac{1}{k}+0\right)=(k^2-1)\operatorname{sgn}\sin(k\pi)=0$,

$f\left(\dfrac{1}{k}-0\right)=k^2\operatorname{sgn}\sin(k\pi)=0$. 又$f\left(\dfrac{1}{k}\right)=k^2\operatorname{sgn}\sin(k\pi)=0$,所以 $x=\dfrac{1}{k}$是连续点.

类似地讨论可知,$x=-\dfrac{1}{k}$也是连续点;

对 $x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$,易知$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}+0\right)=(k-1)\operatorname{sgnsin}(\sqrt{k}\pi)$,$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{k}}-0\right)=k\operatorname{sgnsin}(\sqrt{k}\pi)$.

由此可见,当 k 是完全平方数时,$x=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$是连续点,否则为第一类间断点.

类似可讨论 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$的情形.

类题 1　判断下列函数的间断点,并指出其类型.

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$　$(0\leqslant x<1)$;　　(2) $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$.

提示　(1) $x=0$ 及 $x=\dfrac{1}{n}$(n 为自然数) 为第一类间断点;

(2) $x=0$ 及 $x=1$ 为第一类间断点,而 $x=-1$ 为第二类间断点.

类题 2　设 $f(x)=|x-a|-|x-b|$, 问:$f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有界吗?连续吗?又当$|x|\to+\infty$ 时,$f(x)$ 的极限存在吗?

提示　由 $|f(x)|=\big||x-a|-|x-b|\big|\leqslant|a-b|$ 知,有界.

$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上显然连续.

当 $x>\max\{a,b\}$ 时,$f(x)=b-a$;

当 $x<\min\{a,b\}$ 时,$f(x)=a-b$,

故当 $a\neq b$ 时,极限不存在;当 $a=b$ 时,极限存在.

例 2.5　求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$,求函数 $f(x)$ 的间断点并判断其类型(数学Ⅱ).

解　$f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left[\left(1+\dfrac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}}\right]^{\frac{x}{\sin x}}$

$=\mathrm{e}^{\frac{x}{\sin x}}$.

由此可见,函数 $f(x)$ 的间断点为 $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,其中 $x=0$ 为可去间断点,其余的为第二类间断点.

例 2.6　(1)设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调,则 $f(x)$ 至多有第一类间断点;

(2)设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上单调,并且可以取到 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的一切值,则 $f(x)$ 连续.

证明　(1)不妨设 $f(x)\uparrow$. $\forall x_0\in(a,b)$,当 $x\to x_0^-$ 时,函数值 $f(x)\uparrow$,并且有上界 $f(x_0)$,所以极限存在,且

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)\leqslant f(x_0);$$

同理,当 $x\to x_0^+$ 时,函数值 $f(x)\downarrow$,并且有下界 $f(x_0)$,所以极限存在,且

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0+0) \geqslant f(x_0).$$

若 $f(x_0-0) = f(x_0+0)$，则 x_0 为连续点；若 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，则 x_0 为第一类间断点.

对闭区间的端点，比如 $x = a$ 点，有

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a+0) \geqslant f(a).$$

若等号成立，则 a 为连续点；否则 a 为第一类间断点.

这样就证明了，闭区间 $[a,b]$ 上的每一点如果不是连续点，就是第一类间断点.

(2)用反证法. 假设 $x_0 \in [a,b]$ 为 $f(x)$ 的间断点，由(1)知，它是第一类间断点，即 $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$，而在此二数之间，$f(x)$ 至多取一个值 $f(x_0)$，这与题设矛盾. 故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 2.7 证明：若函数 f 在区间 I 上处处连续，且为一一映射，则 f 在 I 上严格单调(华东师大).

证明 用反证法. 先证明：f 在 I 上是单调的.

若不然，则至少存在三个点 $x_1,x_2,x_3 \in I$，满足 $x_1 < x_2 < x_3$，但 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，而 $f(x_2) \geqslant f(x_3)$. 由于 f 是一一映射，所以上述不等式为严格的，即 $f(x_1) < f(x_2)$，而 $f(x_2) > f(x_3)$.

注意到 f 在 I 上连续，对 f 分别在区间 $[x_1,x_2]$ 和 $[x_2,x_3]$ 上应用介值定理，则存在 $\xi_1 \in (x_1,x_2)$ 和 $\xi_2 \in (x_2,x_3)$，使得 $f(\xi_1) = f(\xi_2)$. 这与 f 是一一映射相矛盾，所以 f 是单调的.

再证明：f 在 I 上是严格单调的.

不妨设 f 在 I 上是单调递增的，则对任意 $x_1,x_2 \in I$，有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. 注意到 f 在 I 上是一一对应的，故必有 $f(x_1) < f(x_2)$. 这表明，f 在 I 上是严格单调的.

例 2.8 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义，若 $f(x)$ 的每一个值都恰好取两次，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续.

证明 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到最大值 M 和最小值 m. 由题设，$f(x)$ 的最大值和最小值都恰好取到两次，在这四次取值中至少有两次在 $[a,b]$ 内取到. 因此，不妨设，$f(x_0) = f(x_0') = M$，$a < x_0 < x_0' \leqslant b$.

取三个点 x_1,x_2,x_3 满足 $x_1 < x_0 < x_2 < x_3 < x_0'$. 令 $A = \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$，$B = A + \varepsilon$($\varepsilon > 0$ 适当小，固定)，显然 $A < B < M$. 对 $f(x)$ 分别在 $[x_1,x_0]$，$[x_0,x_2]$，$[x_3,x_0']$ 上应用连续函数的介值定理，存在三个点 y_1,y_2,y_3 且 $y_1 < y_2 < y_3$，使 $f(y_1) = f(y_2) = f(y_3) = B$. 这与每个值都恰好取两次矛盾.

例 2.9 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，证明：

(1) f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界；

(2) f 能取到最大值或最小值.

证明　(1)因为 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 故 $\exists M > 0$,当 $|x| > M$ 时,有

$$|f(x)| < |A| + 1.$$

又 f 在 $[-M,M]$ 上连续,所以 $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上有界,即 $\exists K > 0, \forall x \in [-M,M]$,有 $|f(x)| \leqslant K$. 令 $G = \max\{|A|+1, K\}$,则 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$,都有 $|f(x)| \leqslant G$,即 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界;

(2)若在 $(-\infty, +\infty)$ 上 $f(x) \equiv A$,则结论显然成立.

设 $f(x) \not\equiv A$,则 $\exists x_0$,使 $f(x_0) = B \neq A$. 不妨设 $B > A$,取 $\varepsilon = \dfrac{1}{2}(B - A) > 0$,由 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 知, $\exists M > |x_0|$,使当 $|x| > M$ 时, 有

$$f(x) < A + \varepsilon < B.$$

而 f 在 $[-M,M]$ 上连续,故 f 在 $[-M,M]$ 上能取到最大值 K,即 $\exists x_1 \in [-M, M]$,使 $f(x_1) = K$. 由于 $x_0 \in [-M,M]$, 所以 $f(x_0) \leqslant f(x_1)$, 即 $B \leqslant K$. 于是 $\forall\ |x| > M$, 有 $f(x) < B \leqslant K$. 这就证明了: $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 都有 $f(x) \leqslant K$ 且 $f(x_1) = K$ 是 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的最大值.

若 $B < A$,则用同样方法可证 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上取到最小值.

注 2.1　在本例的条件下,连续函数 f 不一定同时取到最大值和最小值. 如 $f(x) = |\arctan x|$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,有 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上能取到最小值 $f(0) = 0$, 但它不存在最大值.

例 2.10　证明:若 f 在 $[0,1]$ 上连续, $f(0) = f(1)$, 则对任何自然数 n, $\exists \xi \in [0,1]$,使得

$$f\left(\xi + \frac{1}{n}\right) = f(\xi).$$

证明　令 $F(x) = f(x) - f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$. 将 $[0,1]$ 区间 n 等分: $\left[0, \dfrac{1}{n}\right], \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right], \cdots, \left[\dfrac{n-1}{n}, \dfrac{n}{n}\right]$. 显然 $F(x)$ 在上述小区间上连续,且

$$F(0) = f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{2}{n}\right),$$

$$\vdots$$

$$F\left(\frac{n-1}{n}\right) = f\left(\frac{n-1}{n}\right) - f(1).$$

若分点 $0,\frac{1}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$ 中有一个使 $F(x)=0$,则命题得证.

若不然,则由 $F(0)+F\left(\frac{1}{n}\right)+\cdots+F\left(\frac{n-1}{n}\right)=f(0)-f(1)=0$ 可知,上述被加项中必有两项异号,在它们所构成的区间上应用连续函数根的存在定理即知结论成立.

类题 1 已知函数 f 在圆周上有定义且连续,证明:可以找到一条直径的两个端点 a 和 b,使 $f(a)=f(b)$.

提示 以圆心为极点,以某个半径为极轴建立极坐标系,则圆周上的点可以由极角 θ 决定,f 便是 θ 的函数,且以 2π 为周期. 这样问题就转化为求一 θ,使 $f(\theta)=f(\theta+\pi)$. 令 $g(\theta)=f(\theta)-f(\theta+\pi)$,对 $g(\theta)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用根的存在定理.

类题 2 证明:对椭圆内的任一点 P,存在椭圆过 P 的一条弦,使得 P 是该弦的中点.

提示 如图 2-1 所示,取有向距离 PA 的长度为正,PB 的长度为负,作距离差函数 $d(A,B)=|PA|-|PB|$.

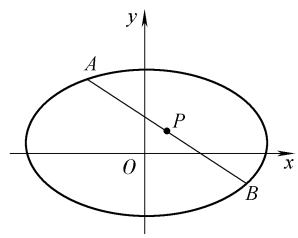


图 2-1

若 $d(A,B)=0$,则 P 点即为弦 AB 的中点,命题成立.

若 $d(A,B)\neq 0$,不妨设 $d(A,B)>0$,则 $d(B,A)<0$. 当椭圆上的点 A,B 沿着椭圆连续变动时,距离差函数 $d(A,B)$ 也连续地从正变为负. 由根的存在定理,一定存在一条弦 $A'B'$,使 $d(A',B')=0$,即 P 点是弦 $A'B'$ 的中点.

类题 3 证明:函数 $F(x)=\int_0^x \sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ 在 $(0,1]$ 上有无穷多个零点(苏州大学).

提示 显然 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上连续,欲证 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上有无穷多个零点,只需证 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上无穷多次变号即可. 易见

当 $\frac{1}{(2k+1)\pi}<t<\frac{1}{2k\pi}$ 时,$\sin\frac{1}{t}>0$;

当 $\frac{1}{(2k+2)\pi}<t<\frac{1}{(2k+1)\pi}$ 时,$\sin\frac{1}{t}<0$,

其中 $k\in\mathbf{N}_+$,由于 k 有无穷多个,所以 $\sin\frac{1}{t}$ 在 $(0,1]$ 上无穷多次改变符号,从而 $F(x)$ 在 $(0,1]$ 上有无穷多个零点.

例 2.11 设 $n>1$ 为整数,$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$.

证明:方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在区间 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个实根(第一届全国大学生(非数

学类)数学竞赛决赛试题).

证明　设 $G(x)=F(x)-\frac{n}{2}$,则 $G(x)$ 在 $\left[\frac{n}{2},n\right]$ 上连续,且有

$$G\left(\frac{n}{2}\right)=F\left(\frac{n}{2}\right)-\frac{n}{2}=\int_0^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t-\frac{n}{2}$$

$$<\int_0^{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t-\frac{n}{2}=0.$$

下面考察

$$G(n)=F(n)-\frac{n}{2}=\int_0^{n}\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t-\frac{n}{2}$$

的符号.

由于

$$\begin{aligned}
&\int_0^n\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t\\
=&-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}\\
=&-\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^n+\int_0^n\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n+1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{d}t\\
=&1-\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}-\int_0^n\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}\\
=&2-\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}\right)+\int_0^n\mathrm{e}^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}\right)\mathrm{d}t\\
=&\cdots\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^k}{k!}+\cdots+\sum_{k=0}^{1}\frac{n^k}{k!}+\sum_{k=0}^{0}\frac{n^k}{k!}\right)\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n-k}\frac{n^m}{m!}\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-m}\frac{n^m}{m!}\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\sum_{m=0}^{n}(n-m+1)\frac{n^m}{m!}\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\left[(n+1)\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m}{m!}-\sum_{m=0}^{n}m\cdot\frac{n^m}{m!}\right]\\
=&n+1-\mathrm{e}^{-n}\left[(n+1)\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m}{m!}-n\sum_{m=0}^{n-1}\frac{n^m}{m!}\right]
\end{aligned}$$

$$=n+1-\mathrm{e}^{-n}\left(\sum_{m=0}^{n}\frac{n^m}{m!}+\frac{n^{n+1}}{n!}\right)$$

$$>n+1-\mathrm{e}^{-n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n^m}{m!}-\mathrm{e}^{-n}\frac{n^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\mathrm{e}^{-n}}$$

$$=n-\sqrt{\frac{n}{2\pi}},$$

这里应用了斯特林公式：$n!=\sqrt{2\pi n}\cdot n^n\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{\theta_n}{12n},\theta_n\in(0,1)$.

由此可知，$G(n)>\dfrac{n}{2}-\sqrt{\dfrac{n}{2\pi}}>0$. 于是，由连续函数根的存在定理知，$G(x)=0$，即 $F(x)=\dfrac{n}{2}$ 在 $\left(\dfrac{n}{2},n\right)$ 内至少存在一个实根.

例 2.12 设 $f(x)$ 是 $(a,+\infty)$ 上的有界连续函数，证明对任意 $T>0$，存在数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，使得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_u)]=0.$$

（华东师大）.

证明 记 $T(x)=f(x+T)-f(x)$，分三种情况讨论.

(i)若存在 $X_0>a$，使得当 $x>X_0$ 时，恒有 $T(x)\geqslant 0$，即 $f(x+T)\geqslant f(x)$. 取 $x_0=X_0+1,x_1=x_0+T,\cdots,x_n=x_{n-1}+T$，则 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，而且

$$f(x_n)=f(x_{n-1}+T)\geqslant f(x_{n-1}),$$

这表明 $\{f(x_n)\}$ 是单调递增数列. 注意到 $f(x)$ 的有界性，利用单调有界定理，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 存在，记为 L.

由 $T(x_n)=f(x_n+T)-f(x_n)=f(x_{n+1})-f(x_n)\quad(n=0,1,\cdots)$，

可得

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=\lim_{n\to\infty}[f(x_{n+1})-f(x_n)]=0.$$

(ii)若存在 $X_0>0$，使得当 $x>X_0$ 时，恒有 $T(x)\leqslant 0$. 这种情形可仿照(i)证明.

(iii)若存在 $\{x'_n\},\{x''_n\}$ 满足：$x'_n\to+\infty,x''_n\to+\infty\ (n\to\infty)$，使得 $T(x'_n)>0$，$T(x''_n)<0$. 由连续函数根的存在定理知，存在 $x_n\in(x'_n,x''_n)$，使得 $T(x_n)=0$，而且 $x_n\to+\infty\ (n\to\infty)$. 于是，有

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n+T)-f(x_n)]=0.$$

例 2.13 设 $f(x)$ 对 $(-\infty,+\infty)$ 内一切 x 有

$$f(x^2)=f(x),$$

且 $f(x)$ 在 $x=0,x=1$ 连续. 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为常数（华东师大；南航）.

证明　当 $x>0$ 时,由已知条件,有

$$f(x)=f(x^{\frac{1}{2}})=f(x^{\frac{1}{4}})=\cdots=f(x^{\frac{1}{2^n}})=\cdots,$$

于是　　$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}})=f(1);$$

当 $x<0$ 时,$f(x)=f(x^2)=f(1)$;

当 $x=0$ 时,$f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}f(1)=f(1)$.

综上知,$f(x)\equiv f(1)$(常数).

例 2.14　设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有定义,且函数 $e^xf(x)$ 与 $e^{-f(x)}$ 在 $(0,1)$ 内都是单调不减的. 试证:$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续(北师大).

证明　$\forall x_0\in(0,1)$. 由 $e^{-f(x)}\uparrow$ 可知,对 $x>x_0$,有 $e^{-f(x)}\geqslant e^{-f(x_0)}$,

即　　$$e^{f(x_0)}\geqslant e^{f(x)},f(x_0)\geqslant f(x).\tag{1}$$

这表明 $f(x)\downarrow$,所以 $\forall x_0$,$f(x_0-0)$,$f(x_0+0)$ 都存在.

又由 $e^xf(x)\uparrow$ 知,对 $x>x_0$,有 $e^xf(x)\geqslant e^{x_0}f(x_0)$. 令 $x\to x_0^+$ 得

$$e^{x_0}f(x_0+0)\geqslant e^{x_0}f(x_0),$$

即

$$f(x_0+0)\geqslant f(x_0).\tag{2}$$

在式(1)中,令 $x\to x_0^+$ 得

$$f(x_0)\geqslant f(x_0+0).\tag{3}$$

由式(2)、式(3)知,$f(x_0)=f(x_0+0)$. 类似地可证:$f(x_0-0)=f(x_0)$. 从而 $f(x)$ 在 x_0 点连续. 由 x_0 的任意性知,$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续.

例 2.15　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加,但不必连续,且 $f(a)\geqslant a$,$f(b)\leqslant b$. 求证:$\exists c\in[a,b]$,使得 $f(c)=c$(c 称为 $f(x)$ 的不动点)(山东大学;上海交大).

证法 1　用区间套定理. 将 $[a,b]$ 二等分,分点记为 c_0,若 $f(c_0)=c_0$,取 $c=c_0$ 即可. 若 $f(c_0)\neq c_0$,当 $f(c_0)>c_0$ 时,取 $[a_1,b_1]=[c_0,b]$,否则取 $[a_1,b_1]=[a,c_0]$,这样保证有 $f(a_1)\geqslant a_1$,$f(b_1)\leqslant b_1$.

再将 $[a_1,b_1]$ 二等分,分点记为 c_1,若 $f(c_1)=c_1$,取 $c=c_1$ 即可. 若 $f(c_1)\neq c_1$,当 $f(c_1)>c_1$ 时,取 $[a_2,b_2]=[c_1,b_1]$,否则,取 $[a_2,b_2]=[a_1,c_1]$,这样保证有 $f(a_2)\geqslant a_2$,$f(b_2)\leqslant b_2$.

如此继续下去,要么到某一步时,得到一分点 c_n,使得 $f(c_n)=c_n$,取 $c=c_n$ 即可;要么这种步骤可无限地进行下去,得到一个闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$,它满足如下性质:

$$[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n](n=1,2,\cdots);$$

$$b_n-a_n=\frac{1}{2^n}(b-a)\to0(n\to\infty);$$

$$f(a_n) \geqslant a_n, f(b_n) \leqslant b_n.$$

由闭区间套定理，$\exists c$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = c = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

又由 $f(x)$ 的单调性，有

$$f(c-0) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \geqslant \lim_{n\to\infty} a_n = c,$$
$$f(c+0) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} b_n = c.$$

由此，利用 $f(x)$ 的单调递增性，可得

$$c \leqslant f(c-0) \leqslant f(c) \leqslant f(c+0) \leqslant c,$$

即 $f(c) = c$.

证法 2 用确界原理. 令 $E = \{x \mid x \in [a,b], f(x) \geqslant x\}$. 显然 $E \neq \varnothing$，故有上确界 c. 易知

1) 由 $a \leqslant c \leqslant f(c) \leqslant f(b) \leqslant b$ 及 f 的单调性知，$f(c) \leqslant f(f(c))$，故 $f(c) \in E$. 当然，$f(c) \leqslant c$.

2) $\forall x \in E$，由 f 的单调性，$f(x) \leqslant f(c)$，而 $x \leqslant f(x)$，所以 $x \leqslant f(c)$，故 $c \leqslant f(c)$.

由 1)、2) 知，$f(c) = c$.

例 2.16 设 $f(x)$ 是定义在 $[0,1]$ 上的函数，满足以下条件：

(1) $f(0) > 0, f(1) < 0$；

(2) 存在一个连续函数 $g(x)$，使得 $f+g$ 在 $[0,1]$ 上单调增加.

证明：f 在 $(0,1)$ 内有零点.

证明 用区间套定理. 记 $[a,b] = [0,1]$，将区间 $[a,b]$ 二等分，分点记为 c，若 $f(c) = 0$，则问题得证；若 $f(c) \neq 0$，取

$$[a_1,b_1] = \begin{cases} [a,c], & \text{若} f(c) < 0, \\ [c,b], & \text{若} f(c) > 0. \end{cases}$$

再将区间 $[a_1,b_1]$ 二等分，分点记为 c_1，若 $f(c_1) = 0$，则问题得证；若 $f(c_1) \neq 0$，取

$$[a_2,b_2] = \begin{cases} [a_1,c_1], & \text{若} f(c_1) < 0, \\ [c_1,b_1], & \text{若} f(c_1) > 0. \end{cases}$$

如此进行下去，要么到某一步时，得到一个分点 c_n，使得 $f(c_n) = 0$，则问题得证；要么这一过程可无限地进行下去，得到一闭区间列 $\{[a_n,b_n]\}$，它具有如下性质：

$$[a_{n+1},b_{n+1}] \subset [a_n,b_n], n = 1,2,\cdots;$$
$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0 (n \to \infty);$$

$$f(a_n) > 0, f(b_n) < 0.$$

由闭区间套定理,存在 $x_0 \in [a_n, b_n]$, $\forall n$,满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. 由 $f+g$ 的单调性可知,$f+g$ 在 $[0,1]$ 上至多有第一类间断点,而且

$$f(a_n) + g(a_n) \leqslant f(x_0) + g(x_0) \leqslant f(b_n) + g(b_n).$$

在上式中,令 $n\to\infty$,并注意到 $g(x)$ 的连续性,有

$$f(x_0 - 0) + g(x_0) \leqslant f(x_0) + g(x_0) \leqslant f(x_0 + 0) + g(x_0),$$

即

$$f(x_0 - 0) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0 + 0).$$

再由 $f(a_n) > 0, f(b_n) < 0$ 可知,$f(x_0 - 0) \geqslant 0, f(x_0 + 0) \leqslant 0$. 结合上式可得:$f(x_0) = 0$.

例 2.17　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且有唯一最小值点 x_0. 若 $x_n \in [a,b]$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

证明　假设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq x_0$,则 $\exists \varepsilon_0 > 0$,在 $\{x_n\}$ 中可选取子列 $\{x_{n_k}\}$,满足 $|x_{n_k} - x_0| \geqslant \varepsilon_0$. 由于这个子列有界,由致密性定理,可从它中再选取一个收敛子列,仍记为 $\{x_{n_k}\}$,使 $x_{n_k} \to x_0'$ $(k \to \infty)$. 显然 $x_0' \in [a,b]$,且 $x_0' \neq x_0$. 于是

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0'),$$

这与最小值点的唯一性矛盾.

例 2.18　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,并且对任意的 $x \in [a,b]$,存在 $y \in [a,b]$,使 $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x)|$. 求证:$\exists \xi \in [a,b]$,使 $f(\xi) = 0$(西北大学).

证明　$\forall x_0 \in [a,b]$,由已知条件,$\exists x_1 \in [a,b]$,使 $|f(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_0)|$. 对这个 x_1,又 $\exists x_2 \in [a,b]$,使 $|f(x_2)| \leqslant \frac{1}{2}|f(x_1)| \leqslant \frac{1}{2^2}|f(x_0)|$. 如此下去,可得到一个数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$,满足 $|f(x_n)| \leqslant \frac{1}{2^n}|f(x_0)|$. 由致密性定理知,存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$,使 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in [a,b]$. 再由 $f(x)$ 的连续性可得:$|f(\xi)| \leqslant 0$,即 $f(\xi) = 0$.

例 2.19　证明:若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有第一类间断点,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

证明　假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界,则对每一个自然数 n,存在互异点列 $\{x_n\} \subset [a,b]$,使 $|f(x_n)| > n$. 由致密性定理,存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 从 x_0 的左方或右方收敛于 x_0,但 $\{f(x_{n_k})\}$ 不收敛,即 $f(x_0 - 0)$ 与 $f(x_0 + 0)$ 不存在. 这与 $f(x)$ 只有第一类间断点矛盾.

例 2.20　设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 是连续函数,记 $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ 为 $f(x)$ 的 n 次复合. 假设 $f(x)$ 没有不动点,即对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$ 均有 $f(x_0) \neq x_0$. 证明:对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$,数列

$\{f^n(x_0)\}$是无界的(华东师大).

证明 用反证法. 记 $g_n = f^n, n = 1,2,\cdots$. 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$,使得$\{g_n(x_0)\} = \{f^n(x_0)\}$有界,则$\{g_n(x_0)\}$存在一个收敛子列,仍记为它本身,设$\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x_0) = a$. 由 $g_{n+1}(x_0) = f[g_n(x_0)]$和$f$的连续性,令 $n\to\infty$,可得 $a = f(a)$,即f有不动点 a,这与已知条件矛盾,故对任意 $x_0 \in \mathbf{R}$,数列$\{f^n(x_0)\}$是无界的.

例 2.21 用有限覆盖定理证明根的存在定理,即设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且$f(a)f(b) < 0$,则存在$\xi \in (a,b)$,使得$f(\xi) = 0$.

证明 用反证法. 假设$\forall x \in (a,b), f(x) \neq 0$,不妨设$f(x) > 0$. 由$f(x)$在$[a,b]$上的连续性,$\forall \alpha \in [a,b]$,$\exists \delta_\alpha > 0$,使得对 $\forall x_1, x_2 \in O(\alpha,\delta_\alpha) \cap [a,b]$,均有$f(x_1)f(x_2) > 0$. 让 α 取遍$[a,b]$可得一个开集集 $H = \{O(\alpha,\delta_\alpha) \mid \alpha \in [a,b]\}$,它构成了$[a,b]$的一个开覆盖. 由有限覆盖定理,存在 H 中有限个互不相交的开集 $O(\alpha_1), O(\alpha_2), \cdots, O(\alpha_k)$,将区间$[a,b]$覆盖,即 $\bigcup\limits_{i=1}^{k} O(\alpha_i) \supset [a,b]$,且对 $\forall x_1^{(i)}$, $x_2^{(i)} \in O(\alpha_i) \cap [a,b]$,有$f(x_1^{(i)})f(x_2^{(i)}) > 0$. 注意到$k$是有限个,所以$f(x)$在$[a,b]$上每一点的函数值都同号,这与$f(a)f(b) < 0$矛盾. 因此存在$\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi) = 0$.

二、一致连续性

1. 函数$f(x)$在区间I上一致连续是指: $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in I$, 只要$|x_1 - x_2| < \delta$,就有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. 其本质是说$f(x)$在区间$I$上的变化是相对均匀的.

证明函数$f(x)$在区间I上一致连续常用的方法:1)用定义;2)利普希茨(Lipschitz)条件;3)导函数有界. 若$I = [a,b]$,只需要证明$f(x)$在$[a,b]$上连续即可.

一致连续函数的运算性质与连续函数不尽相同,请注意以下各命题与连续函数相应命题的异同.

(1)设$f(x)$与$g(x)$在区间I上一致连续,则$f(x) \pm g(x)$在I上也一致连续;

(2)设$f(x)$与$g(x)$在$\mathbf{R}$上一致连续且有界,则$f(x)g(x)$在$\mathbf{R}$上也一致连续且有界(在无限区间上一致连续的函数未必有界,如:$f(x) = x$);

(3)若$f(x)$与$g(x)$在有限区间I上一致连续,则$f(x)g(x)$也在I上一致连续(易证有限区间上的一致连续函数必有界);

(4)若$f(x)$在区间I(有限或无限)上一致连续,且有正的下确界(或负的上确界),则$\dfrac{1}{f(x)}$在I上也一致连续;

(5)设$f(u)$在区间U上一致连续,$g(x)$在区间I上一致连续且$g(I) \subset U$,则复合函数$f\circ g(x)$在区间I上也一致连续.

需要特别注意的是,连续函数的反函数的连续性定理,对一致连续性未必成立. 例如,$f(x)=\sqrt{x}$ 在$(0,+\infty)$上一致连续,而它的反函数$f^{-1}(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$上却不一致连续. 但对有限区间而言,结论仍成立.

2. 证明函数$f(x)$ 在区间I上不一致连续,常用的方法:

1)用定义,即证 $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x',x''\in I$,尽管$|x'-x''|<\delta$,但$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$;

2)用序列法,即证:$\exists I$上的两个序列$\{x'_n\},\{x''_n\}$,尽管$\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$,但$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x'_n)-f(x''_n)]=A\neq 0$.

首先,我们给出$f(x)$在区间I上一致连续的几个充要条件,其结论可作为一致连续的判别法则使用.

例 2.22　证明:设$f(x)$在有限区间(a,b)上连续,则$f(x)$在(a,b)上一致连续的充要条件是:$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a+0)$,$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b-0)$都存在且有限(山东大学,南开大学).

证明　($\Leftarrow$). 定义函数

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & a<x<b,\\ f(b-0), & x=b,\end{cases}$$

则$F(x)$在闭区间$[a,b]$上连续. 由康托(Cantor)定理,$F(x)$在$[a,b]$上一致连续. 显然,对于一致连续函数,当定义域缩小时,其一致连续性仍然保持. 于是$F(x)$在开区间(a,b)上也一致连续,从而$f(x)$在(a,b)上一致连续.

($\Rightarrow$). 若$f(x)$在(a,b)上一致连续,则$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0(0<\delta<b-a),\forall x',x''\in(a,b)$,只要$|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

将x',x''取在$(a,a+\delta)$或$(b-\delta,b)$内,由柯西收敛准则可知,$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$存在且有限.

注 2.2　若(a,b)是无限区间,则本例的条件是$f(x)$在(a,b)上一致连续的充分条件,但不必要. 例如,$f(x)=x,g(x)=\sin x$都在$(-\infty,+\infty)$上一致连续,但$f(-\infty)=-\infty,f(+\infty)=+\infty$,而$g(-\infty),g(+\infty)$均不存在.

对无限区间,其充分性的证明如下:

设$f(-\infty)$与$f(+\infty)$存在且有限,$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,则由柯西收敛准则,$\forall\varepsilon>0,\exists M>0$,当$x',x''>M$或$x',x''<-M$时,都有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon. \tag{1}$$

由于$f(x)$在$[-M-1,M+1]$上连续,所以一致连续,故对上述$\varepsilon>0,\exists\delta_1>$

$0, \forall x', x'' \in [-M-1, M+1]$，只要 $|x'-x''|<\delta_1$，也有式(1)成立.

取 $\delta=\min\{\delta_1, 1\}>0$，则 $\forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$ 及 $|x'-x''|<\delta$，总有式(1)成立，从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致连续.

类题 若 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在. 问：$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是否有界？是否能取到最大、最小值？是否一致连续？

提示 第一、第二问参见例 2.9，第三问参见注 2.2.

例 2.23 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：$\forall \{x_n'\}, \{x_n''\} \subset I$，只要 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，就有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n')-f(x_n''))=0$（华中理工大学）.

证明 ($\Rightarrow$). 因为 $f(x)$ 在 I 上一致连续，所以 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x', x'' \in I$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

对上述 $\delta>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$ 可知，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n'-x_n''|<\delta$，从而 $|f(x_n')-f(x_n'')|<\varepsilon$，此即为 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0$.

($\Leftarrow$). 用反证法. 函数 $f(x)$ 在 I 上不一致连续可表述为：$\exists \varepsilon_0>0, \forall \delta>0$，$\exists x', x'' \in I$，尽管 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$.

取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots$，相应地存在 $x_n', x_n'' \in I$，满足

$$|x_n'-x_n''|<\frac{1}{n}, \quad |f(x_n')-f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

显然，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')] \neq 0$，矛盾.

注 2.3 这个例题的结论，为判断函数在区间 I 上不一致连续提供了便利的方法. 例如，证明：$f(x)=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

取 $x_n'=\mathrm{e}^{-(n+1)}, x_n''=\mathrm{e}^{-n}, n=1,2,\cdots$ 则有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n'-x_n'')=0, \quad \text{但} \lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=-1 \neq 0.$$

由此可知，$f(x)=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

类题 证明：$f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x}$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上一致连续，但是在 $0<|x|<1$ 上并非一致连续.

提示 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上的一致连续性，利用例 2.20 易证. 至于 $f(x)$ 在 $0<|x|<1$ 上的非一致连续性，可取 $x_n'=\dfrac{1}{n}, x_n''=-\dfrac{1}{n}, n=2,3,\cdots$，显然

$$|x_n'-x_n'|=\frac{2}{n} \to 0 (n\to\infty),$$

但

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=2n\sin\frac{1}{n} \to 2 \neq 0 (n\to\infty).$$

例 2.24　定义 $\omega(\delta)=\sup\limits_{\substack{x',x''\in(a,b)\\|x'-x''|<\delta}}|f(x')-f(x'')|$，称 $\omega(\delta)$ 为 $f(x)$ 在 (a,b) 上的连续模. 证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续的充要条件是：$\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$.

证明　($\Leftarrow$). 若 $\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega(\delta)=0$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0$，当 $0<\delta<\delta_1$ 时，有 $\omega(\delta)=\sup\limits_{\substack{x',x''\in(a,b)\\|x'-x''|<\delta}}|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 于是，$\forall x',x''\in(a,b)$，只要 $|x'-x''|<\delta<\delta_1$，便有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，即 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续.

($\Rightarrow$) 显然.

类题　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：存在函数 $\psi(x)$，在 $(0,+\infty)$ 上具有下述性质：

1) $\psi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调上升，当 $x\geqslant b-a$ 时，$\psi(x)$ 为常数；

2) $\forall x',x''\in[a,b]$，有 $|f(x')-f(x'')|\leqslant\psi(|x'-x''|)$；

3) $\lim\limits_{t\to0^+}\psi(t)=0$　(北师大).

提示　根据连续模的性质，可定义 $\psi(x)$ 如下：

$$\psi(x)=\begin{cases}\omega(x)=\sup\limits_{\substack{t',t''\in[a,b]\\|t'-t''|\leqslant x}}\{|f(t')-f(t'')|\}, & 0<x<b-a,\\ M-m, & b-a\leqslant x,\end{cases}$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，$m=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$.

当 $x_2>x_1>0$ 时，显然 $\omega(x_1)\leqslant\omega(x_2)$，故 $\psi(x)$ 具有性质 1).

由上确界的性质，易知 $\psi(x)$ 具有性质 2).

由 f 在 $[a,b]$ 上的一致连续性及例 2.24 知，$\psi(x)$ 具有性质 3).

注 2.4　利用连续模的估值 $\omega(\delta)\leqslant M\delta^r$ 可求出一致连续定义中所需要的 $\delta(\varepsilon)$. 例如，$f(x)=x^3,x\in(0,1)$，则 $\forall x,y\in(0,1)$，当 $|x-y|<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\omega(\delta)&=\sup|x^3-y^3|=\sup|x-y|\cdot|x^2+xy+y^2|\\&\leqslant3\sup|x-y|\leqslant3\delta.\end{aligned}$$

由此可见，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$ 即可.

例 2.25　$f(x)$ 在有界实数集 E 上一致连续的充要条件是：f 把 E 中的柯西列变为 $\mathbf{R}$ 中的柯西列.

证明　($\Rightarrow$). 若 f 在 E 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x',x''\in E$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

设 $\{x_n\}$ 是 E 中任一柯西列，对上述 $\delta>0,\exists N>0$，当 $n,m>N$ 时，有 $|x_n-x_m|<\delta$，从而有 $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. 这表明 $\{f(x_n)\}$ 是柯西列.

($\Leftarrow$)假设$f(x)$在E上非一致连续,则$\exists \varepsilon_0 > 0$,对$\delta_n = \frac{1}{n}(n = 1,2,\cdots)$,相应地存在$x'_n$和$x''_n$,尽管$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$,但

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0.$$

注意到$\{x'_n\}$是有界数列,由致密性定理,它存在收敛子列$x'_{n_k} \to x_0 (k \to \infty)$. 与此相对应的$\{x''_n\}$也有一个子列$x''_{n_k} \to x_0 (k \to \infty)$. 即$x'_{n_1}, x''_{n_1}, x'_{n_2}, x''_{n_2}, \cdots, x'_{n_k}, x''_{n_k}, \cdots$是$E$中的柯西列,但$f(x'_{n_1}), f(x''_{n_1}), f(x'_{n_2}), f(x''_{n_2}), \cdots, f(x'_{n_k}), f(x''_{n_k}), \cdots$却发散,不是柯西列.

注 必要性的证明没有用到E的有界性.

例 2.26 按一致连续的定义论证:

(1)$\sqrt{x}$在$[0, +\infty)$上一致连续;

(2)$\ln x$在$[1, +\infty)$上一致连续.

证明 (1)$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon^2 > 0$,$\forall x', x'' \in [0, +\infty)$,当$|x' - x''| < \delta$时,分两种情形讨论.

1)当$\max\{x', x''\} \geqslant \varepsilon^2$时,有

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \left|\frac{x' - x''}{\sqrt{x'} + \sqrt{x''}}\right| \leqslant \frac{|x' - x''|}{\sqrt{\varepsilon^2}} < \frac{\delta}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

2)当$\max\{x', x''\} < \varepsilon^2$时,不妨设$x' \geqslant x''$,则有

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| \leqslant \sqrt{x'} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

所以$\sqrt{x}$在$[0, +\infty)$上一致连续.

(2)我们将会用到一个熟知的不等式:

$$\ln(1 + x) \leqslant x \quad (x \geqslant 0). \tag{1}$$

$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon > 0$,$\forall x', x'' \in [1, +\infty)$,当$|x' - x''| < \delta$时,(不妨设$x' \geqslant x''$),有

$$|\ln x' - \ln x''| = \left|\ln\left(1 + \frac{x' - x''}{x''}\right)\right| \leqslant \frac{|x' - x''|}{x''} \quad (\text{应用了式(1)})$$

$$\leqslant |x' - x''| < \varepsilon.$$

所以$\ln x$在$[1, +\infty)$上一致连续.

例 2.27 设$f(x) = \frac{x + 2}{x + 1}\sin\frac{1}{x}$,$a > 0$为正常数. 试证:$f(x)$在$(0, a)$内非一致连续,在$[a, +\infty)$上一致连续(兰大).

证明 (1)证明f在$(0, a)$内非一致连续.

取$x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$,$x''_n = \frac{1}{2n\pi - \frac{\pi}{2}}$,$n = 1,2,\cdots$,则当$n$充分大时,$x'_n, x''_n \in (0, a)$,

且

$$|x'_n - x''_n| = \frac{\pi}{4n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

但　　$$|f(x'_n) - f(x''_n)| = \left| \frac{4n\pi + \pi + 1}{2n\pi + \frac{\pi}{2} + 1} + \frac{4n\pi - \pi + 1}{2n\pi - \frac{\pi}{2} + 1} \right| \to 4 \quad (n \to \infty).$$

故 f 在 $(0,a)$ 内非一致连续.

(2)证明 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续.

只要证明 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界即可. 事实上,

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\cdot\frac{x+2}{x+1}\cos\frac{1}{x},$$

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2}\cdot\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{a^2}\cdot\left(1 + \frac{1}{1+a}\right) \triangleq M, \text{有界.}$$

类题　证明:$f(x) = xe^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

提示　只需证明 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界即可,为此只需证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在且有限即可.

例 2.28　若周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续,证明:

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续;

(2) $f(x) = \sin^2 x + \sin x^2$ 不是周期函数.

证明　(1)设 T 为 $f(x)$ 的周期,则 $f(x)$ 在 $[0,2T]$ 上一致连续,即 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [0,2T]$,只要 $|x' - x''| < \delta$,就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

$\forall x', x'' \in \mathbf{R}$,满足 $|x' - x''| < \delta < T$,则必存在整数 m,使 $x' = mT + t', x'' = mT + t''$,且 $\min\{t', t''\} \in [0,T]$. 于是,$t', t'' \in [0,2T]$ 且满足 $|t' - t''| \leqslant |x' - x''| < \delta$,故 $|f(x') - f(x'')| = |f(t') - f(t'')| < \varepsilon$. 这就证明了 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续.

(2) $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续显然. 若 $f(x)$ 是周期函数,由(1)知,$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上必一致连续,所以只要证明 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续即可.

事实上,取 $x'_n = \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}, x''_n = \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}, n = 1,2,\cdots$. 尽管

$$|x'_n - x''_n| = \frac{\pi}{\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2n\pi - \frac{\pi}{2}}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

但 $|f(x'_n) - f(x''_n)| = |\sin^2 x'_n - \sin^2 x''_n + 2| \to 2 \neq 0$ $(n \to \infty)$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续.

这里应用了 $|\sin^2 x'_n - \sin^2 x''_n| = |\sin x'_n - \sin x''_n| \cdot |\sin x'_n + \sin x''_n|$

$$\leqslant 4\left|\cos\frac{x'_n + x''_n}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x'_n - x''_n}{2}\right|$$

$$\leqslant 2|x'_n - x''_n| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

例 2.29 设 λ 为正实数，确定使 x^λ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续的 λ 的范围以及使 x^λ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续的 λ 的范围(要叙述过程)(川大).

解 当 $\lambda = 1$ 时，x 显然在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

下证：当 $0 < \lambda < 1$ 时，x^λ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续；当 $\lambda > 1$ 时，x^λ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

事实上，当 $0 < \lambda < 1$ 时，因为 x^λ 在 $[0,1]$ 上一致连续，所以只要证明它在 $[1, +\infty)$ 上一致连续即可. 由 $(x^\lambda)' = \frac{\lambda}{x^{1-\lambda}}$ 在 $[1, +\infty)$ 上有界可知，x^λ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

当 $\lambda > 1$ 时，取 $x'_n = n$，$x''_n = n + \frac{1}{n^{\lambda-1}}$，尽管

$$|x'_n - x''_n| = \frac{1}{n^{\lambda-1}} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

但是

$$|(x'_n)^\lambda - (x''_n)^\lambda| = \left(n + \frac{1}{n^{\lambda-1}}\right)^\lambda - n^\lambda$$

$$= n^\lambda\left[\left(1 + \frac{1}{n^\lambda}\right)^\lambda - 1\right]$$

$$> n^\lambda\left[\left(1 + \frac{1}{n^\lambda}\right) - 1\right] = 1,$$

故 x^λ 在 $[0, +\infty)$ 上不一致连续.

从例 2.27 可以看出，幂函数要想在无限区间上一致连续，当 x 充分大时，其增长的阶数不超过 1 阶. 对一般的函数也有同样的结论，请看下面的例题.

例 2.30 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续，则存在非负实数 a 和 b，使 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，都有

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

试证明之(云南大学；南开大学).

证明　因为$f(x)$一致连续,所以$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in (-\infty, +\infty)$,只要$|x' - x''| \leqslant \delta$,就有$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

现将$\varepsilon > 0, \delta > 0$固定. 由于$\forall x \in (-\infty, +\infty)$,存在整数$n$,使得$x = n\delta + x_0$,其中$x_0 \in (-\delta, \delta)$. 注意到$f(x)$在$[-\delta, \delta]$上有界,即$\exists M > 0$,使得$|f(x)| \leqslant M$. 因此,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(n\delta + x_0) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \{f(k\delta + x_0) - f[(k-1)\delta + x_0]\} + f(x_0), \\ |f(x)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(k\delta + x_0) - f[(k-1)\delta + x_0]| + |f(x_0)| \\ &\leqslant |n|\varepsilon + M. \end{aligned}$$

由$x = n\delta + x_0$知,$|n| = \left|\dfrac{x - x_0}{\delta}\right|$,代入上式,有

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}|x - x_0| + M \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}|x| + \left(M + \frac{\varepsilon}{\delta}|x_0|\right) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}|x| + (M + \varepsilon). \end{aligned}$$

记$\dfrac{\varepsilon}{\delta} = a, M + \varepsilon = b$,则$a > 0, b > 0$,使

$$|f(x)| \leqslant a|x| + b, \forall x \in (-\infty, +\infty).$$

类题　设函数$f(x)$在开区间$(1, +\infty)$上一致连续. 证明:

(1) $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$存在且有限;

(2)函数$\dfrac{f(x)}{x}$在$(1, +\infty)$上有界(南开大学).

提示　(1)参见例2.22必要性的证明;

(2)重复例2.30的证明可得:$\exists a, b \geqslant 0$,使$|f(x)| \leqslant ax + b$.

由此可得$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right| \leqslant a + b$,有界.

例2.31　设$f(x)$在$[a, +\infty)(a > 0)$上满足利普希茨条件,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|, \forall x, y \in [a, +\infty).$$

证明:$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a, +\infty)$上一致连续.

证明　只要证明$\dfrac{f(x)}{x}$在$[a, +\infty)$上满足利普希茨条件即可. $\forall x \in [a, +\infty)$,由$|f(x) - f(a)| \leqslant k|x - a|$可得

$$|f(x)| \leqslant |f(a)| + k|x-a|.$$

$\forall x, y \in [a, +\infty)$，考察

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y}\right| &\leqslant \frac{1}{x}|f(x) - f(y)| + |f(y)| \cdot \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{a}|f(x) - f(y)| + \frac{|f(a)| + k|y-a|}{xy} \cdot |x-y| \\ &\leqslant \left(\frac{k}{a} + \frac{|f(a)|}{a^2} + \frac{k}{a}\left|1 - \frac{a}{y}\right|\right) \cdot |x-y| \\ &\leqslant \frac{1}{a}\left(3k + \frac{|f(a)|}{a}\right) \cdot |x-y|.\end{aligned}$$

这表明$\frac{f(x)}{x}$在$[a, +\infty)$上也满足利普希茨条件.

例 2.32 设$f(x)$在$[a, +\infty)$上连续，当$x \to +\infty$时，$y = cx$(c为常数)为$f(x)$的渐近线，证明：$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

证法 1 令$F(x) = f(x) - cx$，则$F(x)$在$[a, +\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. 由注 2.2，$F(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续. 而$y = cx$显然在$[a, +\infty)$上一致连续，故$f(x) = F(x) + y$在$[a, +\infty)$上一致连续.

证法 2 直接证明. 由$\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - cx] = 0$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0$，当$x \geqslant M$时，有$|f(x) - cx| < \varepsilon/3$.

于是，取$\delta = \frac{\varepsilon}{3|c|} > 0$，$\forall x', x'' > M$，且$|x' - x''| < \delta$，有

$$\begin{aligned}|f(x') - f(x'')| &\leqslant |f(x') - cx'| + |f(x'') - cx''| + |c(x' - x'')| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即$f(x)$在$[M, +\infty)$上一致连续. 而$f(x)$显然在$[a, M+1]$上一致连续，故$f(x)$在$[a, +\infty)$上一致连续.

例 2.33 设$\varphi(x)$在$\mathbf{R}$上连续，且

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\varphi(x)}{x^n} = 0.$$

证明：(1)若n为奇数，则存在x，满足$x^n + \varphi(x) = 0$；

(2)若n为偶数，则存在y，使得$\forall x$，有

$$y^n + \varphi(y) \leqslant x^n + \varphi(x).$$

证明 (1)当n为奇数时，$\exists b > 0$，使$\left|\frac{\varphi(b)}{b^n}\right| < \frac{1}{2}$，故

$$b^n + \varphi(b) = b^n\left[1 + \frac{\varphi(b)}{b^n}\right] > \frac{b^n}{2} > 0;$$

同时存在 $a<0$,使 $\left|\dfrac{\varphi(a)}{a^n}\right|<\dfrac{1}{2}$,故

$$a^n+\varphi(a)=a^n\left[1+\frac{\varphi(a)}{a^n}\right]<\frac{a^n}{2}<0.$$

对 $x^n+\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用根的存在定理即可.

(2)当 n 为偶数时,则 $\exists c>0$,满足 $c^n>2\varphi(0)$,即当 $|x|>c$ 时,$\left|\dfrac{\varphi(x)}{x^n}\right|<\dfrac{1}{2}$.

故当 $|x|>c$ 时,

$$x^n+\varphi(x)=x^n\left[1+\frac{\varphi(x)}{x^n}\right]>\frac{x^n}{2}>\frac{c^n}{2}>\varphi(0).$$

取 $a>c$,当 $|x|>a$ 时,仍有 $x^n+\varphi(x)>\varphi(0)$,所以 $x^n+\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值必在 $[-a,a]$ 内取到. 设在 y 点取到,则 $\forall x\in\mathbf{R}$,有 $y^n+\varphi(y)\leqslant x^n+\varphi(x)$.

最后,我们看一个使用一致连续性的例子.

例 2.34　设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,且 $\forall x\geqslant 0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$($n$ 为正整数). 试证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$(江西大学;上海师大;中科院计算中心).

证明　因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续,所以 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall x',x''\in[0,+\infty)$,只要 $|x'-x''|<\delta$,就有

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

对固定的 $\delta>0$,取 $k>\dfrac{1}{\delta}$ 且为正整数,将 $[0,1]$ 区间 k 等分. 记分点 $x_i=\dfrac{i}{k}(i=1,2,\cdots,k)$,则每个小区间的长度 $x_i-x_{i-1}=\dfrac{1}{k}<\delta$.

由已知条件,对每个 $x_i=\dfrac{i}{k}$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_i+n)=0$. 故对上述 $\varepsilon>0$,$\exists N_i>0$,当 $n>N_i$ 时,有 $|f(x_i+n)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 令 $N=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\{N_i\}>0$,则当 $n>N$ 时,有

$$|f(x_i+n)|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(i=1,2,\cdots,k). \tag{2}$$

$\forall x>N$,记 $n=[x]\geqslant N$,因为 $x-n\in[0,1)$,故 $\exists i\in\{1,2,\cdots,k\}$,使得 $|(x-n)-x_i|<\delta$,即 $|x-(n+x_i)|<\delta$,由式(1),有

$$|f(x)-f(n+x_i)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

再由式(2),有

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(n+x_i)|+|f(n+x_i)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0.$

本题亦可用反证法予以证明.

事实上,若结论不对,则存在 $\exists \varepsilon_0 > 0$,对 $\forall n \in \mathbf{N}_+$,相应地存在 $x_n > n$,使得 $|f(x_n)| > \varepsilon_0$.

记 $y_n = x_n - [x_n]$,则 $0 \leqslant y_n < 1$. 由 $\{y_n\}$ 的有界性知,它存在一个收敛子列,不妨设为它本身,满足 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$,或 $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_0) = 0$.

由 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续可知,对上述 $\varepsilon_0 > 0$, $\exists \delta_0 > 0$, $\forall x, y \in [0, +\infty)$,只要 $|x - y| < \delta_0$,就有 $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon_0}{2}$. 于是,当 n 充分大时,有

$$|([x_n] + x_0) - ([x_n] + y_n)| = |y_n - x_0| < \delta_0,$$

从而有

$$|f([x_n] + x_0) - f(x_n)| = |f([x_n] + x_0) - f([x_n] + y_n)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

由此可得

$$\begin{aligned} |f([x_n] + x_0)| &= |f(x_n) + f([x_n] + x_0) - f(x_n)| \\ &> |f(x_n)| - |f([x_n] + x_0) - f(x_n)| > \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \end{aligned}$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n + x_0) = 0$ 的假设矛盾.

第三讲　一元函数的微分学

在这一讲中将涉及函数的导数与微分、高阶导数、微分中值定理及其应用、泰勒公式及其应用、利用导数研究方程根的存在性等.

一、导数与微分

1. $f(x)$ 在点 x_0 可导,其导数

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

若仅考虑 $x\to x_0^-(\Delta x\to 0^-)$ 或 $x\to x_0^+(\Delta x\to 0^+)$ 就得到其左、右导数,记为 $f'_-(x_0)$、$f'_+(x_0)$.

定理　$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=A$.

这个定理主要用来判断分段函数在分段点处的可导性.

2. $f(x)$ 在 x_0 点可微是指:$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$　(Δx 充分小).

$\mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的微分,习惯上写成 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\mathrm{d}x$.

3. 可导与可微的关系

对一元函数,可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

4. 可导(可微)与连续的关系

$f(x)$ 在点 x_0 可导 $\rightleftarrows$ $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\rightleftarrows$ $f(x)$ 在点 x_0 有极限.

例 3.1　讨论在什么条件下,函数

$$f(x) = \begin{cases} |x|^{2\alpha}\left[|x|^{2\beta}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 可微.

解　由定义,需要计算

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|^{2\alpha}}{x}\left[|x|^{2\beta}\right].$$

当 $x>0$ 时,$0\leqslant\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\leqslant x^{2(\alpha+\beta)-1}$;

当 $x<0$ 时,$-|x|^{2(\alpha+\beta)-1}\leqslant\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\leqslant 0$.

所以当且仅当$2(\alpha+\beta)>1$时,$f'(0)$存在且为0.

当$\beta>0$时,对充分小的$|x|$,恒有$[|x|^{2\beta}]\equiv 0$,故对任意的α,都有$\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\equiv 0$,从而$f'(0)=0$.

总之,当$\alpha+\beta>\dfrac{1}{2}$或$\beta>0$时,$f(x)$在点$x=0$可微且$f'(0)=0$.

类题1 设$f(x)=\begin{cases}|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{|x|^{\beta}}, & 0<|x|\leqslant 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

其中,$\beta>0$是给定的常数.问:在什么条件下,

(1)$f'(0)$存在; (2)f'在$[-1,1]$上有界; (3)f'在$[-1,1]$上连续.

提示 (1)由

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{|x|^{\alpha}\sin\dfrac{1}{|x|^{\beta}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}x\cdot\sin\frac{1}{|x|^{\beta}}$$

可知,当$\alpha>1$时,$f'(0)$存在且$f'(0)=0$.

(2)当$x\neq 0$时,

$$f'(x)=\alpha|x|^{\alpha-1}\operatorname{sgn}x\sin\frac{1}{|x|^{\beta}}-\beta|x|^{\alpha-\beta-1}\operatorname{sgn}x\cdot\cos\frac{1}{|x|^{\beta}}.$$

易见,当$\alpha\geqslant\beta+1$时,f'在$[-1,1]$上有界.

(3)欲使$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$,必须要求$\alpha-\beta-1>0$,即$\alpha>\beta+1$.

类题2 设$f(x)=\left|\ln|x|\right|$,求$f'(x)$.

提示

$$f(x)=\begin{cases}\ln x, & x\geqslant 1,\\ -\ln x, & 0<x<1,\\ -\ln(-x), & -1<x<0,\\ \ln(-x), & x\leqslant -1.\end{cases}$$

由于$f(x)$在$x=0$处无定义,故$f'(0)$不存在.用定义不难算出$f'_{-}(1)=-1$,$f'_{+}(1)=1$,即$f'(1)$不存在;$f'_{-}(-1)=-1$,$f'_{+}(-1)=1$,即$f'(-1)$亦不存在.故

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & |x|>1,\\ -\dfrac{1}{x}, & 0<|x|<1.\end{cases}$$

例3.2 讨论下列函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数},\\ x, & x\text{为有理数},\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}0, & x\text{为无理数},\\ x^2, & x\text{为有理数}\end{cases}$$

的连续性与可导性.

解　对 f, $\forall x_0 \neq 0$, 取 $\delta = \dfrac{|x_0|}{2} > 0$, 在 $U(x_0,\delta)$ 内对任一有理数 x 均有 $|f(x)| > \delta$, 对任一无理数 x 均有 $f(x) = 0$. 所以 f 在 $x_0 \neq 0$ 处都不连续, 当然也不可导.

同理, 对 g, $\forall x_0 \neq 0$, g 在 x_0 处也不连续、不可导.

当 $x_0 = 0$ 时, 由于 $|f(x)| \leqslant |x|$, 所以 f 在 $x_0 = 0$ 处连续, 但由于

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \begin{cases} 0, & x \text{ 为无理数}, \\ 1, & x \text{ 为有理数} \end{cases}$$

在 $x \to 0$ 时极限不存在, 因而 f 在 $x_0 = 0$ 处不可导.

对 g, 由于

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = f(x) \to 0 \quad (x \to 0),$$

所以 $g'(0) = 0$. 当然 g 在 $x_0 = 0$ 处也连续.

注 3.1　本例中的 f 给出一个处处有定义、处处不可导而只在一点连续的例子; g 给出一个处处有定义, 而仅在一点连续、可导的例子. 由此可见, 函数的连续性与可导性都只是描述函数在所考察点的局部性态.

例 3.3　证明: 黎曼函数在 $\mathbf{R}$ 上处处不可导.

证明　因为 $R(x)$ 是以 1 为周期的函数, 所以只要在 $[0,1]$ 上讨论它的可导性即可. 又因为 $R(x)$ 在有理点处不连续, 因此它在有理点处不可导.

下面将证明 $R(x)$ 在无理点处也不可导.

$\forall \alpha \in [0,1]$ 为无理数, 设 $\alpha = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 是无限不循环小数, 对任意 $h_n \neq 0$ 充分小, 分两种情形:

当 h_n 是有理数时, 有

$$\frac{f(\alpha + h_n) - f(\alpha)}{h_n} = \frac{0 - 0}{h_n} = 0;$$

当 h_n 是无理数时, 设 $h_n = -0.00\cdots a_{n+1}a_{n+2}\cdots$ 是无限不循环小数, 有

$$\frac{f(\alpha + h_n) - f(\alpha)}{h_n} = \frac{f(0.a_1a_2\cdots a_n)}{h_n} \quad (a_n \neq 0).$$

而

$$\left|\frac{f(\alpha + h_n) - f(\alpha)}{h_n}\right| \geqslant \frac{\dfrac{1}{10^n}}{\dfrac{1}{10^n}} = 1,$$

故当 $h_n \to 0$ 或 $n \to \infty$ 时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(\alpha + h_n) - f(\alpha)}{h_n}$ 不存在, 即 $R(x)$ 在无理点 α 处

不可导.

注:这里用到了 $R(x)$ 函数的定义(见例 2.2).

例 3.4 设函数 f 在 $x=0$ 处连续,$f(0)=0$,且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=a.$$

证明:$f'(0)=a$.

证明 先证:$f'_+(0)=a$. 由已知条件,$\forall \varepsilon>0,\exists \delta>0,\forall x\in(0,\delta)$,有

$$\left|\frac{f(2x)-f(x)}{x}-a\right|<\varepsilon,$$

或

$$x(a-\varepsilon)<f(2x)-f(x)<x(a+\varepsilon). \tag{1}$$

由式(1)可得

$$\frac{x}{2}(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2}\right)<\frac{x}{2}(a+\varepsilon),$$

$$\frac{x}{2^2}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2}\right)-f\left(\frac{x}{2^2}\right)<\frac{x}{2^2}(a+\varepsilon),$$

$$\vdots$$

$$\frac{x}{2^n}(a-\varepsilon)<f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<\frac{x}{2^n}(a+\varepsilon).$$

将上述不等式相加,可得

$$x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a-\varepsilon)<f(x)-f\left(\frac{x}{2^n}\right)<x\left(1-\frac{1}{2^n}\right)(a+\varepsilon),\forall n.$$

令 $n\to\infty$,由于 f 在 $x=0$ 处连续,所以有

$$x(a-\varepsilon)\leqslant f(x)-f(0)\leqslant x(a+\varepsilon),$$

即

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-a\right|<\varepsilon.$$

这表明 $f'_+(0)=a$.

同理可证:$f'_-(0)=a$. 故 $f'(0)=a$.

例 3.5 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,在什么情况下 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导?

解 断言:若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,当 $f(0)\neq 0$ 或 $f(0)=f'(0)=0$ 时,$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导.

事实上,设 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=A$.

先看 $f(0)\neq 0$ 的情形.

若 $f(0)>0$,由极限的局部保号性知,$\exists \delta>0,\forall x\in(-\delta,\delta)$,有 $f(x)>0$.

于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=A;$$

若$f(0)<0$,同理,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-A;$$

再看$f(0)=f'(0)=0$的情形.

记$g(x)=|f(x)|$,由$f(0)=0$知,$g(0)=0$.

$$\begin{aligned}g'_-(0)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\\&=-\lim_{x\to 0^-}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=-|f'(0)|=0,\\g'_+(0)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=|f'(0)|=0.\end{aligned}$$

故$g'(0)$存在且为0.

注 3.2　由本例知,当$f(0)=0$且$f'(0)\neq 0$时,函数$|f(x)|$在0处是不可导的.看下面的题目.

选择题　设$f(x)$在$x=a$处可导,则$|f(x)|$在$x=a$处不可导的充分条件是(　　)(数学Ⅲ,Ⅳ).

(A)$f(a)=0$且$f'(a)=0$;　　(B)$f(a)=0$且$f'(a)\neq 0$;

(C)$f(a)>0$且$f'(a)>0$;　　(D)$f(a)<0$且$f'(a)<0$.

应选(B).

例 3.6　设$f(x)$在(0,1)内可导,且$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$. 证明:$f'(x)$在(0,1)内无界,但当$x\to 1^-$时,$f'(x)$未必是无穷大量(华南理工).

证明　欲证$f'(x)$在(0,1)内无界,只需证明$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}|f'(x)|=+\infty$即可. 事实上,

$$\overline{\lim_{x\to 1^-}}|f'(x)|=\overline{\lim_{x\to 1^-}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot f(x)\right|\geqslant\overline{\lim_{x\to 1^-}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\cdot\overline{\lim_{x\to 1^-}}|f(x)|.$$

若$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|=0$,则$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}|(\ln f(x))'|=\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|=0$,进而$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}(\ln f(x))'=0$. 由此可知,在1附近$\ln f(x)$有界. 注意到在1附近$f(x)>0$,所以$f(x)$在1附近有界,这与已知条件矛盾. 因此$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\geqslant\alpha>0$,从而

$\overline{\lim\limits_{x\to 1^-}}|f'(x)| = +\infty$.

取 $f(x) = \dfrac{1}{1-x} + \cos\dfrac{1}{1-x}$，显然 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$，且 $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}\left(1 - \sin\dfrac{1}{1-x}\right)$ 在 1 附近无界，但不是无穷大量.

例 3.7 设 $f(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上，$x_0 \in (a,b)$，$f(x)$ 在 x_0 处有左、右导数；令 $a < a_n < x_0 < b_n < b$，又设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$. 证明：存在子列 $\{a_{n_k}\}$，$\{b_{n_k}\}$，使

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(b_{n_k}) - f(a_{n_k})}{b_{n_k} - a_{n_k}} = pf'_+(x_0) + qf'_-(x_0), \quad p + q = 1.$$

（上海交大）

证明 令 $\lambda_n = \dfrac{b_n - x_0}{b_n - a_n}$，$n = 1,2,\cdots$，则 $0 < \lambda_n < 1$，$0 < 1 - \lambda_n < 1$. 而

$$\frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = \lambda_n\left\{\frac{f(b_n) - f(x_0)}{b_n - x_0}\right\} + (1 - \lambda_n)\left\{\frac{f(a_n) - f(x_0)}{a_n - x_0}\right\}.$$

由致密性定理，$\{\lambda_n\}$ 有收敛子列 $\{\lambda_{n_k}\}$，使 $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_{n_k} = p$.

令 $q = 1 - p$，则

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{f(b_{n_k}) - f(a_{n_k})}{b_{n_k} - a_{n_k}} &= pf'_+(x_0) + (1-p)f'_-(x_0)\\ &= pf'_+(x_0) + qf'_-(x_0).\end{aligned}$$

例 3.8 设 f 在 $[0,1]$ 上可微，且使得 $\{x \in [0,1] \mid f(x) = 0 = f'(x)\} = \varnothing$. 证明：$f$ 在 $[0,1]$ 中只有有限个零点.

证明 用反证法. 假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 中有无限个零点 $\{x_n\}$. 由致密性定理，它存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k} \to x_0 (k \to \infty)$，且 $x_0 \in [0,1]$. 由 f 的连续性，$f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = 0$. 于是由导数的定义，有

$$f'(x_0) = \lim_{k\to\infty}\frac{f(x_{n_k}) - f(x_0)}{x_{n_k} - x_0} = 0.$$

这表明 f 和 f' 在 $[0,1]$ 中有共同的零点 x_0，这与已知条件矛盾.

类题 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续可微函数，记

$$A(p) = \{x \in [a,b] \mid f(x) = p\}, p \in \mathbf{R}.$$

试证明：若对任意 $x \in A(p)$，均有 $f'(x) \neq 0$，则集合 $A(p)$ 是有限集（中科院）.

例 3.9 设定义在 $\mathbf{R}$ 上的 $f(x)$ 满足：对任意的 $x_0 \in \mathbf{R}$，都存在 $\delta > 0$，使得 $f(x_0) \geqslant f(x)$，$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$，证明：存在一个区间 I，使得 $f(x)$ 在 I 上是一个常数（大连理工）.

证明 由已知条件，对 $x_1 \in \mathbf{R}$，相应地 $\exists \delta_1 = \delta_1(x_1) > 0$，使得 $\forall x \in (x_1 - \delta_1, x_1$

$+\delta_1)$,有$f(x)\leqslant f(x_1)$.

如果$f(x)$在$\mathbf{R}$的任一子区间均不为常数,则$\exists x_2\in(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$,使得$f(x_2)<f(x_1)$;

对$x_2\in\mathbf{R}$,相应地$\exists\delta_2=\delta_2(x_2)>0$,使得$\forall x\in(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)$,有$f(x)\leqslant f(x_2)$. 不失一般性,可设$\delta_2\leqslant\frac{\delta_1}{2}$.

如果$f(x)$在$\mathbf{R}$的任一子区间均不为常数,则$\exists x_3\in(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2)$,使得$f(x_3)<f(x_2)$;

如此下去,可得点列$\{x_n\}\subset(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1)$,满足$x_{n+1}\in(x_n-\delta_n,x_{n+1}+\delta_n)$,$f(x_{n+1})<f(x_n)$,且$\delta_{n+1}\leqslant\frac{\delta_n}{2^n}$.

注意到$\{x_n\}$是有界点列,由致密性定理可知它存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$,设$x_{n_k}\to\bar{x}(k\to\infty)$. 对$\bar{x}$利用已知条件,$\exists\bar{\delta}=\bar{\delta}(\bar{x})>0$,使得$\forall x\in(\bar{x}-\bar{\delta},\bar{x}+\bar{\delta})$,有$f(x)\leqslant f(\bar{x})$.

由$x_{n_k}\to\bar{x}$及$\delta_{n_k}\to0(k\to\infty)$可知,存在充分大的$k_0>0$,使得

$$(x_{n_{k_0}}-\delta_{n_{k_0}},x_{n_{k_0}}+\delta_{n_{k_0}})\subset(\bar{x}-\bar{\delta},\bar{x}+\bar{\delta}),\text{且}f(x_{n_{k_0}})\leqslant f(\bar{x}).$$

另一方面,从$\{x_n\}$的构造及$\bar{x}$的性质易知,$\bar{x}\in(x_{n_{k_0}}-\delta_{n_{k_0}},x_{n_{k_0}}+\delta_{n_{k_0}})$,因此

$$f(\bar{x})\leqslant f(x_{n_{k_0+1}})<f(x_{n_{k_0}}).$$

这显然与上式矛盾,所以f在$\mathbf{R}$的某子区间上必为常数.

例 3.10　设$f(x)$在$[0,+\infty)$上二次连续可微,$f(0)=f'(0)=0$且$f''(x)>0$. 又设$u(x)$表示曲线$y=f(x)$在点$(x,f(x))$的切线在x轴上的截距,试求极限

$$\lim_{x\to0^+}\frac{xf(u(x))}{u(x)f(x)}.$$

(南京航空航天大学).

证明　利用切线方程求出$u=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$. 将$f(u)$在$x=0$作泰勒展开:

$$f(u)=f(0)+f'(0)u+\frac{1}{2}f''(\xi)u^2=\frac{1}{2}f''(\xi)u^2\quad(\xi\text{在}0\text{与}u\text{之间}).$$

(这里利用了当$x\to0$时,$u(x)\to0$这一事实. 这一点不难用洛必达法则得到). 于是

$$\frac{xf(u)}{uf(x)}=\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{f(x)}xu=\frac{1}{2}f''(\xi)\left[\frac{x^2}{f(x)}-\frac{x}{f'(x)}\right].$$

对$\frac{x^2}{f(x)}$和$\frac{x}{f'(x)}$使用洛必达法则,可得$\frac{x^2}{f(x)}-\frac{x}{f'(x)}\to\frac{1}{f''(0)}\quad(x\to0^+)$.

故原极限 = $\frac{1}{2}$.

二、高阶导数

1. 熟记常用的高阶导数公式

$$(x^k)^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)\cdots(k-n+1)x^{k-n}, & n < k, \\ k! & n = k, \\ 0, & n > k, \end{cases}$$(其中 k 为自然数);

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right);$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}};$$

$$(e^x)^{(n)} = e^x, (a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n.$$

2. 求高阶导数常用的方法.

(1)拆、合法

当遇到的表达式不易直接求导时,常将它拆开成若干项之和,然后利用熟知的结果或先求导一次,然后合成一项,再利用熟知的结果.

(2)莱布尼茨公式法

若要求导的函数是两个函数相乘,而每一个函数的高阶导数都是熟知的结果或求导次数不是太高,则可直接应用莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = \sum_{r=0}^{n} C_n^r u^{(r)} v^{(n-r)}.$$

(3)数学归纳法

当高阶导数不能一下求出时,可先求出前几阶导数,总结归纳出其 n 阶导数的表达式,然后用数学归纳法加以证明.

(4)递推公式法

先求出前几阶(一般是两阶)导数化成等式,然后两边同时求高阶导数,得到一般形式的递推关系式.

(5)泰勒公式法

欲求 $f(x)$ 在 $x = a$ 处的 n 阶导数值,可将 $f(x)$ 在 a 点作泰勒展开:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

由此可求出 $f^{(n)}(a)$.

例 3.11 求 $y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ 的 n 阶导数.

解 $y' = e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x)$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cos\beta x - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\sin\beta x\right)$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x}(\cos\varphi\cos\beta x - \sin\varphi\sin\beta x)$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,e^{\alpha x}\cos(\beta x+\varphi),\text{其中}\ \varphi = \arctan\frac{\beta}{\alpha}.$$

用数学归纳法,易证:

$$y^{(n)} = (\alpha^2+\beta^2)^{\frac{n}{2}}e^{\alpha x}\cos(\beta x+n\varphi).$$

例 3.12　设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$　$(x>0)$, 记

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}(P_n(x)\cos x + Q_n(x)\sin x),$$

其中 $P_n(x)$, $Q_n(x)$ 是关于 x 的多项式,求 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n(x)$.

解　由莱布尼茨公式,有

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=0}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{x}\right)^{(i)}(\sin x)^{(n-i)}$$

$$= \sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\frac{i!}{x^{i+1}}\sin\left(x+\frac{(n-i)\pi}{2}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\frac{i!}{x^{i+1}}\sin\frac{(n-i)\pi}{2}\cos x + \sum_{i=0}^{n}C_n^i(-1)^i\frac{i!}{x^{i+1}}\cos\frac{(n-i)\pi}{2}\sin x$$

$$= (-1)^n\frac{n!}{x^{n+1}}\left\{\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\sin\frac{(n-i)\pi}{2}x^{n-i}\right]\cos x + \right.$$

$$\left.\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\cos\frac{(n-i)\pi}{2}x^{n-i}\right]\sin x\right\}.$$

由此可知,

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\frac{1}{(n-i)!}\sin\frac{(n-i)\pi}{2}x^{n-i}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{k!}\left(\sin\frac{k\pi}{2}\right)x^k \quad (\text{令 } k=n-i)$$

$$= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

和

$$Q_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x,$$

$$\lim_{n\to\infty}Q_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cos x.$$

例 3.13 证明:函数

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处存在任意阶导数,且 $f^{(n)}(0)=0\quad(n=1,2,\cdots)$.

证明 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}},\quad f''(x)=\left(\frac{4}{x^6}-\frac{6}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\cdots,$$

$$f^{(n)}(x)=p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}},\cdots$$

其中 $p_n\left(\frac{1}{x}\right)$ 是关于 $\frac{1}{x}$ 的 $3n$ 次多项式(这不难用数学归纳法证明).

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}\overset{令\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=0,$$

假设 $f^{(n-1)}(0)=0$,则有

$$\begin{aligned}f^{(n)}(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{p_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}\\&\overset{令\frac{1}{x}=t}{=\!=\!=}\lim_{t\to\infty}\frac{tp_{n-1}(t)}{e^{t^2}}=0.\end{aligned}$$

例 3.14 用莱布尼茨公式计算 $y^{(n)}(0)$.

(1) $y=\arcsin x$; (2) $y=\arctan x$.

解 (1)求两阶导数可得

$$(1-x^2)y''=xy'.$$

对上式两边求 n 阶导数,得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}.$$

在上式中,令 $x=0$ 可得

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0).$$

由递推公式,并注意到 $y(0)=0,y'(0)=1$,可得

$$y^{(2k)}(0)=0,\quad y^{(2k+1)}(0)=[(2k-1)!!]^2,k\text{ 为自然数}.$$

(2)求导一次可得

$$(1+x^2)y'=1.$$

对上式两边求 n 阶导数,得

$$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0.$$

在上式中,令 $x=0$ 可得

$$y^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)y^{(n-2)}(0).$$

由递推公式,并注意到 $y(0)=0, y'(0)=1$ 可得:

$$y^{(2k)}(0)=0, y^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!, k \text{ 为自然数.}$$

例 3.15　设 $f(x)=x^{10}\arctan x$, 求 $f^{(n)}(0)$ (西北大学).

解　用泰勒公式,

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad x\in(-1,1).$$

两边积分可得

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x\in[-1,1].$$

由此可得 $f(x)$ 的泰勒展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+11}, \quad x\in[-1,1],$$

于是,有

$$f^{(2n+11)}(0)=(-1)^n\frac{(2n+11)!}{2n+1}.$$

若令 $2n+11=2l+1$, 则上式可改写为

$$f^{(2l+1)}(0)=(-1)^{l-5}\frac{(2l+1)!}{2l-9}, \quad l\geqslant 5.$$

综上,我们有

$$f^{(2l)}(0)=0, f^{(2l+1)}(0)=\begin{cases}(-1)^{l-5}\dfrac{(2l+1)!}{2l-9}, & l\geqslant 5,\\ 0, & 0\leqslant l<5,\end{cases}$$

其中 l 为自然数.

类题　求高阶导数在指定点处的值.

(1)设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$ (华东师大);

(2)设 $f(x)=x^2\ln(1+x)$,求 $f^{(n)}(0)(n\geqslant 3)$ (数学Ⅱ).

提示　(1)由 $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x\in\mathbf{R}$ 可得

$$\frac{\sin x}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}, x\neq 0.$$

由此知

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{2k+1}, & n=2k,\\ 0, & n=2k+1,\end{cases}\qquad k\in\mathbf{N}.$$

(2)由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$,$x\in(-1,1]$,可得

$$x^2\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n+2}}{n}=\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n-2}.$$

由此知,

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}\frac{n!}{n-2},\quad (n\geqslant 3).$$

例 3.16 设 $f(x)$,$g(x)$,$p(x)$ 有二阶连续导数,求

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{h^3}\begin{vmatrix}f(x) & g(x) & p(x)\\ f(x+h) & g(x+h) & p(x+h)\\ f(x+2h) & g(x+2h) & p(x+2h)\end{vmatrix}$$

(华中师大).

证明 因为一阶差商 $\dfrac{\Delta f(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ 逼近一阶导数 $f'(x)$.

二阶差商

$$\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2}=\frac{\dfrac{\Delta f(x+h)}{h}-\dfrac{\Delta f(x)}{h}}{h}=\frac{f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)}{h^2}$$

逼近二阶导数 $f''(x)$,所以利用行列式的性质有

$$\text{原极限}=\lim_{h\to 0}\begin{vmatrix}f(x) & g(x) & p(x)\\ \dfrac{\Delta f(x)}{h} & \dfrac{\Delta g(x)}{h} & \dfrac{\Delta p(x)}{h}\\ \dfrac{\Delta^2 f(x)}{h^2} & \dfrac{\Delta^2 g(x)}{h^2} & \dfrac{\Delta^2 p(x)}{h^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f(x) & g(x) & p(x)\\ f'(x) & g'(x) & p'(x)\\ f''(x) & g''(x) & p''(x)\end{vmatrix}.$$

例 3.17 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上三阶可导,证明:存在实数 ξ,使得

$$f(\xi)f'(\xi)f''(\xi)f'''(\xi)\geqslant 0.$$

证明 若存在一点 $x_0\in(-\infty,+\infty)$. 使得 $f^{(i)}(x_0)(i=0,1,2,3)$ 中有一个为零,则结论显然成立. 因此,不妨设 $f^{(i)}(x)\neq 0(i=0,1,2,3)$,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$.

不失一般性,假设 $f'''(x)>0$,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$. 这是因为,若 $f'''(x)<0$,考虑 $g(x)=f(-x)$,则 $g'''(x)=-f'''(x)>0$,而且当 $\eta\in(-\infty,+\infty)$,使得 $g(\eta)g'(\eta)g''(\eta)g'''(\eta)>0$ 时,令 $\xi=-\eta$,则必有 $f(\xi)f'(\xi)f''(\xi)f'''(\xi)>0$.

进而,不失一般性还可假设$f''(x)>0,\forall x\in(-\infty,+\infty)$. 这是因为,若$f''(x)<0$,考虑$h(x)=-f(x)$,则$h''(x)=-f''(x)>0$,而且当$\xi\in(-\infty,+\infty)$,使得$h(\xi)h'(\xi)h''(\xi)h'''(\xi)>0$时,必有$f(\xi)f'(\xi)f''(\xi)f'''(\xi)>0$.

于是,我们可在$f''(x)>0$,$f'''(x)>0,\forall x\in(-\infty,+\infty)$的假设下证明本题的结论.

由泰勒公式,有

$$f'(x)=f'(a)+f''(a)(x-a)+\frac{1}{2!}f'''(\eta_1)(x-a)^2$$
$$>f'(a)+f''(a)(x-a)\to+\infty\ (x\to+\infty).$$

其中η_1在x与a之间. 由此可知,存在$X_1>a$,当$x\geqslant X_1$时,$f'(x)>0$.

再由泰勒公式,有

$$f(x)=f(X_1)+f'(X_1)(x-X_1)+\frac{1}{2!}f''(\eta_2)(x-X_1)^2$$
$$>f(X_1)+f'(X_1)(x-X_1)\to+\infty\ (x\to+\infty),$$

其中η_2在x与X_1之间. 由此可知,存在$X>X_1$,当$x\geqslant X$时,$f(x)>0$. 若取$\xi=X$,则$f(\xi)f'(\xi)f''(\xi)f'''(\xi)>0$.

三、微分中值定理及其应用

1. 罗尔(Rolle)定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)$,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)=0$$

罗尔定理多被用来讨论一个函数及其导数在某个范围内的零点问题,而费马(Fermat)引理也是讨论一个函数零点的重要工具.

推广的罗尔定理　设(a,b)为有限或无限区间,$f(x)$在(a,b)内可微,且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$($A$可为有限也可为$\pm\infty$),则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

这个结论稍后将作为例题予以证明.

2. 拉格朗日(Lagrange)定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,则至少存在一点$\xi\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

在拉格朗日定理的条件下,$\forall x_1,x_2\in[a,b]$,则$\exists\eta$在x_1与x_2之间,使得

$$f'(\eta)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

也就是说,曲线上任意两点的弦,必与两点之间曲线上的某点的切线平行. 这也正

是拉格朗日定理的几何解释.

3. 柯西(Cauchy)定理 设函数$f(x)$,$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,在开区间(a,b)内可导,且$\forall x \in (a,b)$,$g'(x) \neq 0$,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

许多教科书中,在证明柯西定理时,采用了与证明拉格朗日定理相仿的方法——构造辅助函数,利用罗尔定理. 在陈纪修等主编的《数学分析》(上册)(高等教育出版社,1999年)中给出了完全不同的证明方法——利用反函数存在定理、反函数导数存在定理和拉格朗日定理,给人以耳目一新的感觉,有兴趣的同学不妨品味一下.

4. 导数的两个重要性质

a. 导数极限定理 设函数$f(x)$在x_0点的邻域$U(x_0)$内连续,在$\mathring{U}(x_0)$内可导. 若极限$\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$存在,则$f'(x_0)$也存在,且

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f'(x).$$

这个定理告诉我们:在区间I上的导数$f'(x)$,对I上的每一点,要么是连续点,要么是第二类间断点. 也就是说,**导数不可出现第一类间断点**.

注 3.3 1. 所谓导数无第一类间断点,是对导数处处存在的前提而言的. 例如,$f(x) = |x|$. 当$x > 0$时,$f'(x) = 1$;当$x < 0$时,$f'(x) = -1$. 在$x = 0$处便是第一类间断点,但这与我们的定理并不矛盾,因为$f(x)$在$x = 0$处不可导.

2. 导数可以有第二类间断点. 例如,函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在**R**上连续,且

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$f'(x)$在**R**上不连续,$x = 0$是$f'(x)$的第二类间断点.

b. 达布(Darboux)定理 设函数$f(x)$在$[a,b]$上可导,且$f'(a) \neq f'(b)$,k为介于$f'(a)$与$f'(b)$之间的任一实数,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi) = k.$$

这个定理也称为**导数的介值性定理**,它与连续函数的介值定理具有同样的意义,但这里不要求导数$f'(x)$在$[a,b]$上连续.

例 3.18 证明推广的罗尔定理.

证明　1)设 (a,b) 为有限区间. 若 A 是有限值,令

$$F(x)=\begin{cases}f(a+0), & x=a,\\ f(x), & x\in(a,b),\\ f(b-0), & x=b.\end{cases}$$

容易验证 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件,故 $\exists\xi\in(a,b)$,使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)=0;$$

2)若 $A=+\infty$,则无论 (a,b) 为有限区间或无限区间,由 $f(x)$ 在 (a,b) 内的连续性知,当 $c>0$ 且充分大时,直线 $y=c$ 与曲线 $y=f(x)$ 至少有两个交点 $(x_1,f(x_1))$,$(x_2,f(x_2))$,即 $f(x_1)=f(x_2)=c$ 且 $x_1,x_2\in(a,b)$. 不妨设 $x_1<x_2$,对 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 上应用罗尔定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$;

对 $A=-\infty$ 的情形可类似地证明;

3)若 A 为有限值,(a,b) 为无限区间.

若 $f(x)\equiv A$,则结论显然成立.

若 $f(x)\not\equiv A$,则 $\exists x_0\in(a,b)$,使 $f(x_0)\neq A$. 不妨设 $f(x_0)>A$,取 $\varepsilon>0$ 充分小,使 $f(x_0)>A+\varepsilon$ 仍成立,则直线 $y=A+\varepsilon$ 与曲线 $y=f(x)$ 至少有两个交点 $(x_1,f(x_1))$,$(x_2,f(x_2))$,即 $f(x_1)=f(x_2)=A+\varepsilon$,不妨设 $x_1<x_2$,在 $[x_1,x_2]\subset(a,b)$ 上对 $f(x)$ 应用罗尔定理即可.

例 3.19　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可微,且满足不等式

$$0\leqslant f(x)\leqslant\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},\ \forall x\in(0,+\infty).$$

证明:存在一点 $\xi\in(0,+\infty)$,使得

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

(北大).

证明　由已知的不等式,$f(0)=0$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 令

$$F(x)=f(x)-\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}},$$

则

$$F(0)=0,\ \lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)-\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0.$$

由推广的罗尔定理,$\exists\xi\in(0,+\infty)$,使得 $F'(\xi)=0$,即

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$

类题 1 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{x}{1+x^2}$,证明:$\exists \xi > 0$,使得

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

类题 2 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导,$f(0)=1$,且 $|f(x)| \leqslant \mathrm{e}^{-x}$,$\forall x \geqslant 0$. 证明:$\exists \xi > 0$,使 $f'(\xi) + \mathrm{e}^{-\xi} = 0$.

例 3.20 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导,且 $f'(a) = f'(b)$,证明:存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi - a}.$$

证明 欲证结论成立,只需证明方程 $(x-a)f'(x) - [f(x)-f(a)] = 0$ 在 (a,b) 内有解. 注意到

$$\left[\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]' = \frac{(x-a)f'(x) - [f(x)-f(a)]}{(x-a)^2},$$

我们可以构造辅助函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a < x \leqslant b, \\ f'(a), & x = a, \end{cases}$$

显然,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $g(b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

若 $g(a) = g(b)$,由罗尔定理可得结论;

若 $g(a) \neq g(b)$,不妨设若 $g(a) < g(b)$,则有

$$g'(b) = \frac{1}{b-a}\left[f'(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right] = \frac{g(a)-g(b)}{b-a} < 0,$$

进而可知,$g'(b) = \lim\limits_{x \to b^-} \dfrac{g(x)-g(b)}{x-b} < 0$. 由极限的保号性,$\exists \delta > 0$,当 $x \in (b-\delta, b)$ 时,有 $g(x) > g(b) > g(a)$. 由此可知,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值必在内部达到,设在 ξ 点达到. 由费马引理,$g'(\xi) = 0$,这就完成了证明.

例 3.21 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内二阶可导,过点 $A(0,f(0))$ 与点 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y = f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$,其中 $0 < c < 1$. 证明:$\exists \xi \in (0,1)$,使 $f''(\xi) = 0$ (数学Ⅳ).

分析 由要证的结论可以看出,如果我们能在 $[0,1]$ 上找到三个点,使得 $f(x)$ 在这三个点处的值相等,然后再使用两次罗尔定理便可得结论. 但可惜的是,题目没有提供这方面的信息! 注意到要证的是 $f''(\xi) = 0$,若我们将 $f(x)$ 减去一个一次函数,即令 $F(x) = f(x) -$ "一次函数",则两次求导后结果不会改变. 而连结 AB 的直线方程 $y = [f(1)-f(0)]x + f(0)$ 就是一次函数. 由题设,该直线与曲

线 $y=f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三个交点,因此,如果令

$$F(x)=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0),$$

则 $F(0)=F(c)=F(1)=0$. 这样,对 $F(x)$ 使用两次罗尔定理可得结论.

利用本例的思路,下面的问题就不难解决了.

例 3.22　设 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上二阶可导,且 $f(0)=0, f(1)=1, f(4)=2$. 证明:$\exists \xi \in (0,4)$,使

$$f''(\xi)=-\frac{1}{3}.$$

分析　乍一看,本例似乎与例 3.20 没有多大关系. 实际上,它是上例中两点所确定的直线与曲线 $y=f(x)$ 有三个交点的情形推广为由三点所确定的抛物线与曲线 $y=f(x)$ 有三个交点的情形. 容易求出过三点 $(0,0),(1,1),(4,2)$ 的抛物线为 $y=-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x$. 令

$$F(x)=f(x)-\left(-\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{6}x\right),$$

仿上例立即可得结论.

注 3.4　一般过三点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$ 的二次抛物线方程可直接写出来:

$$y=\frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1+\frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2+\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

利用这个公式和上面的思想,可以证明如下命题:

例 3.23　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内二阶可导,证明:$\exists \xi \in (a,b)$ 使

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi).$$

证明　记 $c=\frac{a+b}{2}$,则过三点 $(a,f(a)),(c,f(c)),(b,f(b))$ 的抛物线为

$$y=\frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}f(b).$$

令 $F(x)=f(x)-y(x)$,则 $F(a)=F(c)=F(b)=0$,故存在 $\xi \in (a,b)$,使 $F''(\xi)=0$.

而

$$F''(x) = f''(x) - \left[\frac{2}{(a-c)(a-b)}f(a) + \frac{2}{(c-b)(c-a)}f(c) + \frac{2}{(b-c)(b-a)}f(b)\right],$$

注意到

$$(a-c)(a-b) = (b-c)(b-a) = -\frac{(c-b)(c-a)}{2} = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

由 $F''(\xi) = 0$ 立即可得出结论.

本例亦可用泰勒展开式作.

事实上,仍记 $c = \frac{a+b}{2}$,则

$$f(a) = f(c) + f'(c)(a-c) + \frac{1}{2}(a-c)^2 f''(\xi_1), \xi_1 \in (a,c),$$

$$f(b) = f(c) + f'(c)(b-c) + \frac{1}{2}(b-c)^2 f''(\xi_2), \xi_2 \in (c,b).$$

由 $a - c = -(b-c) = -\frac{b-a}{2}$,将上两式相加可得

$$f(a) + f(b) = 2f(c) + \frac{(b-a)^2}{4}\left[\frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}\right].$$

由达布定理知, $\exists \xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$, 使

$$f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2}.$$

将 $f''(\xi)$ 代入上式,移项即得结论.

例 3.24 若函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$,则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

证明 由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$ 可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists X_0 > 0$,当 $x > X_0$ 时,有

$$|f'(x)| < \varepsilon.$$

对 $\forall x > X_0$,在 $[X_0, x]$ 上对 f 应用拉格朗日中值定理,

$$f(x) = f(X_0) + f'(\xi)(x - X_0), \xi \in (X_0, x).$$

于是,有

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(X_0)}{x}\right| + \frac{x - X_0}{x}|f'(\xi)|$$

$$< \frac{|f(X_0)|}{x} + \varepsilon.$$

对固定的 X_0,因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{|f(X_0)|}{x} = 0$,所以对上述 $\varepsilon > 0$, $\exists X > X_0$,当 $x > X$ 时,

有$\frac{|f(X_0)|}{x} < \varepsilon$. 故

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

注 3.5　(1) 本例是在极限为零的情形下证明的,如果极限为不等于零的有限数,结论仍然成立;

(2) 本例可作进一步的推广:若$f(x)$在$(a, +\infty)$上二阶可导且$\lim\limits_{x\to+\infty} f''(x) = A$,则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2} = A.$$

一般地,若$f(x)$在$(a, +\infty)$上n阶可导,且$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = A$,则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{x^{n-k}} = A, k = 0,1,\cdots,n,$$

这里$f^{(0)}(x) = f(x)$.

例 3.25　设$f(x)$在$(1, +\infty)$上可微,且对$x > 1$满足

$$f'(x) = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2[f^2(x) + 1]}.$$

证明:$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x) + x] = +\infty$.

证明　记$g(x) = f(x) + x$, 则

$$g'(x) = f'(x) + 1 = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2[f^2(x) + 1]} + 1 = \frac{2x^2 + (x^2 - 1)f^2(x)}{x^2[f^2(x) + 1]}$$

$$> \frac{2}{f^2(x) + 1}, \forall x > 1,$$

因此,$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$存在广义极限,记为$L$.

若$L < +\infty$,对$g(x)$在$[x, x+1]$$(x > 1)$上应用拉格朗日中值定理,存在$\xi_x \in (x, x+1)$使得$g'(\xi_x) = g(x+1) - g(x)$,则$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(\xi_x) = \lim\limits_{x\to+\infty}[g(x+1) - g(x)] = 0$. 这表明在$(1, +\infty)$上存在一个点列$\{\xi_x\}$, 使得

$$\lim_{x\to+\infty} g'(\xi_x) = 0.$$

另一方面,由$g'(x) = \frac{x^2 - f^2(x)}{x^2[f^2(x) + 1]} + 1 = \frac{\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^2} - \left(\frac{g(x)}{x} - 1\right)^2\right]}{\left[\frac{g(x)}{x} - 1\right]^2 + 1} + 1$,

令$x \to +\infty$可得:$\lim\limits_{x\to+\infty} g'(x) = 1$. 这显然与刚才的结论矛盾,所以$L = +\infty$.

例 3.26　证明:若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$a \geqslant 0$,则在(a,b)内存在三点x_1, x_2, x_3,使得

$$f'(x_1) = (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}.$$

(川大).

证明 应用柯西中值定理,分别取 $g(x) = x, x^2, x^3$. 注意到 $a \geqslant 0$,故 $\forall x \in (a,b)$,均有 $g'(x) \neq 0$. 具体如下:

取 $g(x) = x$,则 $\exists x_1 \in (a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)} = f'(x_1); \tag{1}$$

取 $g(x) = x^2$,则 $\exists x_2 \in (a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2} = \frac{f'(x_2)}{2x_2},$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2}; \tag{2}$$

取 $g(x) = x^3$,则 $\exists x_3 \in (a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = \frac{f'(x_3)}{3x_3^2},$$

或

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3} = (b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2}. \tag{3}$$

由式(1)、式(2)、式(3)可知结论成立.

注 3.6 这个命题很容易推广到如下形式:

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $a \geqslant 0$,则 $\exists x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a,b)$,使得

$$\begin{aligned} f'(x_1) &= (b+a)\frac{f'(x_2)}{2x_2} = (b^2+ba+a^2)\frac{f'(x_3)}{3x_3^2} \\ &= \cdots = (b^{n-1}+b^{n-2}a+\cdots+ba^{n-2}+a^{n-1})\frac{f'(x_n)}{nx_n^{n-1}}. \end{aligned}$$

类题 1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,$a > 0$. 证明:在 $[a,b]$ 上存在三个点 x_1, x_2, x_3,使

$$\frac{f'(x_1)}{2x_1} = (a^2+b^2)\frac{f'(x_2)}{4x_2^3} = \frac{\ln b - \ln a}{b^2-a^2}f'(x_3)x_3.$$

提示 取 $g_1(x) = x^2, g_2(x) = x^4, g_3(x) = \ln x$. 对 $f(x)$ 和 $g_i(x)(i = 1,2,3)$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理即可.

类题 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有三阶导数,证明:$\exists \xi \in (a,b)$,使得

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(郑州大学).

提示　令　$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{1}{2}(x-a)[f'(a)+f'(x)]$,

$$G(x)=-\frac{1}{12}(x-a)^3.$$

对 $F(x),G(x)$ 连续使用两次柯西中值定理即可.

例 3.27　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在开区间 (a,b) 内可导,且 $f'(x)>0$. 若极限 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在,证明:

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$;

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ,使

$$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}=\frac{2\xi}{f(\xi)};$$

(3)在 (a,b) 内存在与(2)中 ξ 相异的点 η,使

$$f'(\eta)(b^2-a^2)=\frac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(数学Ⅱ).

证明　(1)由 $\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在知,$\lim\limits_{x\to a+}f(2x-a)=0$. 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,可知 $f(a)=0$. 而 $f'(x)>0$,故

$$f(x)>f(a)=0,\quad x\in(a,b).$$

(2)取 $F(x)=x^2$,$g(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,$x\in[a,b]$. 对 $F(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理即可.

(3)由 $f(\xi)=f(\xi)-f(a)$,在 $[a,\xi]$ 上应用拉格朗日中值定理知,$\exists\eta\in(a,\xi)$,使 $f(\xi)=f'(\eta)(\xi-a)$. 将 $f(\xi)$ 代入(2)的结论中,整理即可.

例 3.28　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 证明:$\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\cdot\mathrm{e}^{-\eta}.$$

(数学Ⅲ).

分析　将结论变形为

$$f'(\xi)\frac{b-a}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta}.$$

进而写成

$$f'(\xi)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}. \tag{1}$$

由$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$可以看出,首先应对$f(x)$和$e^x$在$[a,b]$上应用柯西中值定理.这样就有$\eta\in(a,b)$,使

$$\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}=\frac{f'(\eta)}{e^\eta}. \tag{2}$$

在式(1)中,若$f'(\xi)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}=1$即

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi). \tag{3}$$

再结合式(2),问题就解决了.而对$f(x)$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理即可知式(3)成立.

例 3.29 设$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且$f(a)=f(b)=1$.试证明:$\exists\xi,\eta\in(a,b)$,使

$$e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1.$$

(数学Ⅳ).

分析 将结论变形为

$$e^\eta[f(\eta)+f'(\eta)]=e^\xi,$$

或

$$[e^xf(x)]'|_{x=\eta}=e^\xi.$$

由上式左端可见,首先应对$e^xf(x)$在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理,即$\exists\eta\in(a,b)$,使

$$\frac{e^bf(b)-e^af(a)}{b-a}=[e^xf(x)]'|_{x=\eta}. \tag{1}$$

注意到$f(b)=f(a)=1$,则式(1)变为

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=[e^xf(x)]'|_{x=\eta}. \tag{2}$$

再对e^x在$[a,b]$上应用拉格朗日中值定理知,$\exists\xi\in(a,b)$使

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^\xi. \tag{3}$$

由式(1)、式(2)、式(3)可知,结论成立.

例 3.30 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且$f(0)=f(1)=0$,$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.试证:(1)$\exists\eta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$,使$f(\eta)=\eta$;

(2)对任意实数λ,必存在$\xi\in(0,\eta)$,使$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

(数学Ⅲ).

分析　(1) 令 $F(x)=f(x)-x$,对 $F(x)$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上应用根的存在定理即可.

(2)将结论中 ξ 换成 x :$f'(x)-\lambda[f(x)-x]=1$.

即　　$$[f'(x)-1]-\lambda[f(x)-x]=0,$$

亦即　　$$[f(x)-x]'-\lambda[f(x)-x]=0,$$

或　　$$\{e^{-\lambda x}[f(x)-x]\}'=0.$$

由此可见,令 $F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,对 $F(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上应用罗尔定理即可.

下面看一个将罗尔定理和积分中值定理结合起来的题目.

例 3.31　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\quad(k>1).$$

证明:至少存在一点 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$　(数学Ⅲ).

证明　令 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导. 由题设,利用积分中值定理知,$\exists\eta\in\left(0,\frac{1}{k}\right)$,使得

$$F(1)=f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}F(x)\mathrm{d}x=F(\eta).$$

因此,由罗尔定理可知,$\exists\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使得 $F'(\xi)=0$. 由于

$$F'(x)=xe^{1-x}f'(x)+(1-x)e^{1-x}f(x),$$

故有

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

下面的几个题目均属于这种类型,同学们可仿照例 3.31 的方法证明之.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{\frac{2}{3}}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明:$\exists\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=0$(数学Ⅰ,Ⅱ).

(2)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微,且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\mathrm{d}x$. 证明:$\exists\xi\in(0,1)$,使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$(数学Ⅳ).

(3)设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且满足

$$f(1)=3\int_0^{\frac{1}{3}}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x.$$

证明:$\exists\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$(数学Ⅳ).

例 3.32　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可微,又 $f(x)$ 不是线性函数. 证明:$\exists c\in(a,b)$,使

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

分析 设过点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线方程为 $g(x)$，必存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $g(\xi) \neq f(\xi)$（因为 $f(x)$ 不是线性函数），则过点 $(a,f(a))$ 与 $(\xi,f(\xi))$ 的直线斜率 k_1，和过点 $(\xi,f(\xi))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线斜率 k_2 中必有一个大于 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. 再对 k_1 或 k_2 应用拉格朗日中值定理，便可得结论.

证明 过点 $(a,f(a))$ 与 $(b,f(b))$ 的直线方程为

$$g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a),$$

显然，$g(a)=f(a)$，$g(b)=f(b)$. 由于 $f(x)$ 不是线性函数，故存在点 $\xi \in (a,b)$，使 $g(\xi) \neq f(\xi)$. 不妨设 $g(\xi) < f(\xi)$，则有

$$\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi} < \frac{g(b)-g(\xi)}{b-\xi} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{g(\xi)-g(a)}{\xi-a} < \frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}.$$

由拉格朗日中值定理，$\exists c_1 \in (a,\xi)$ 和 $c_2 \in (\xi,b)$，使

$$f'(c_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(c_1).$$

当 $f(a) \leqslant f(b)$ 时，有 $f'(c_1) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$，取 $c = c_1$；

当 $f(a) > f(b)$ 时，有 $f'(c_2) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 0$，取 $c = c_2$.

于是，总存在 $c \in (a,b)$，使

$$\left|f'(c)\right| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

推论 在例 3.31 的条件下，附加 $f(b) > f(a)$，则 $\exists c \in (a,b)$，使

$$f'(c) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

（上海交大）.

例 3.33 设 $f(x)$ 定义在 $[0,c]$ 上，$f'(x)$ 存在且 $f'(x) \downarrow$，$f(0)=0$. 证明：对 $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant a+b \leqslant c$，有

$$f(a+b) \leqslant f(a)+f(b).$$

证明 当 $a=0$ 时，结论显然成立；

当 $a>0$ 时，在 $[0,a]$ 上应用拉格朗日中值定理，有

$$\frac{f(a)}{a} = f'(\xi_1), \xi_1 \in (0,a).$$

在 $[b,a+b]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$\frac{f(a+b)-f(b)}{a}=f'(\xi_2),\xi_2\in(b,a+b).$$

因为 $\xi_2>\xi_1$,所以 $f'(\xi_2)\leqslant f'(\xi_1)$,从而有

$$f(a)\geqslant f(a+b)-f(b).$$

类题　设在 $[0,a]$ 上 $|f''(x)|\leqslant M$,且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取到最大值. 证明:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

提示　设 $f(x)$ 在 $c\in(0,a)$ 点取到最大值,则 $f'(c)=0$. 在 $[0,c]$ 和 $[c,a]$ 上对 $f'(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理即可.

例 3.34　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(0)=0,f(1)=1$. 证明:$(0,1)$ 内存在两个不同点 x_1,x_2,使

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2.$$

分析　显然要使用两次拉格朗日中值定理. 设 $c\in(0,1)$,对 $f(x)$ 在区间 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理可得

$$f'(x_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(c)}{c},x_1\in(0,c),$$

$$f'(x_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{1-f(c)}{1-c},x_2\in(c,1).$$

欲使

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=\frac{c}{f(c)}+\frac{1-c}{1-f(c)}=2,$$

只要 $f(c)=\frac{1}{2}$ 即可. 而 $f(0)=0,f(1)=1$,由连续函数的介值定理,存在 $c\in(0,1)$,使 $f(c)=\frac{1}{2}$. 这样,问题便解决了!

例 3.34 的一般形式是下面的例题.

例 3.35　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(0)=0,f(1)=1,k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为 n 个正数. 证明在区间 $[0,1]$ 内存在一组互不相等的数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

(中国科大).

证明　用上例的思路来证明之. 令

$$K=k_1+k_2+\cdots+k_n,y_0=0\text{ 以及}$$

$$y_i=\frac{1}{K}(k_1+k_2+\cdots+k_i),i=1,2,\cdots,n.$$

显然 $0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = 1$. 取 $t_0 = 0, t_n = 1$. 在 $[0,1]$ 上对 $f(x)$ 应用介值定理,可以求得一点 $t_1 \in (0,1)$ 使 $f(t_1) = y_1$. 再在 $[t_1,1]$ 上对 $f(x)$ 应用介值定理,又可求得一点 $t_2 \in (t_1,1)$,使 $f(t_2) = y_2$. 如此下去,可以求出 $t_3 < t_4 < \cdots < t_{n-1} < 1$,使得 $f(t_i) = y_i (i = 3,4,\cdots,n-1)$. 总之,我们有 $f(t_i) = y_i (i = 0,1,\cdots,n)$.

在每一个小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上,对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理,存在 $x_i \in (t_{i-1},t_i)$,使得

$$y_i - y_{i-1} = f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(x_i)(t_i - t_{i-1}),$$

即

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{f'(x_i)} = t_i - t_{i-1},$$

亦即

$$\frac{k_i}{f'(x_i)} = K(t_i - t_{i-1}).$$

将上式对 i 从 1 到 n 求和,可得

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{f'(x_i)} = K\sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = K(t_n - t_0) = K = \sum_{i=1}^{n} k_i.$$

例 3.36 如果函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导,且 $f(0) = 0, \forall x \in [0,1]$,有 $|f'(x)| \leqslant |f(x)|$. 证明:$f(x) \equiv 0, x \in [0,1]$.

证法 1 显然 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界,即 $\exists M > 0, \forall x \in [0,1]$ 有 $|f(x)| \leqslant M$. $\forall x \in (0,1]$,对 $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上应用拉格朗日中值定理,有

$$|f(x)| = |f'(\xi_1)(x-0)| = |f'(\xi_1)|x \leqslant |f(\xi_1)|x, \quad 0 < \xi_1 < x,$$

而

$$|f(\xi_1)| = |f(\xi_1) - f(0)| = |f'(\xi_2)|\xi_1 \leqslant |f(\xi_2)|x, \quad 0 < \xi_2 < \xi_1 < x.$$

如此下去,可得到

$$|f(x)| \leqslant |f(\xi_n)|x^n \leqslant Mx^n, 0 < \xi_n < \xi_{n-1} < \cdots < \xi_1 < x.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 (x \in (0,1))$,可得 $f(x) = 0$. 再由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,有 $f(1) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0$. 故 $\forall x \in [0,1]$,均有 $f(x) = 0$.

证法 2 $\forall \varepsilon > 0$,设 $|f(x)|$ 在 $[0,1-\varepsilon]$ 上的最大值为 M,且在点 x_0 取到,即 $|f(x_0)| = M$. 由拉格朗日中值定理,有

$$M = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi)x_0| \leqslant |f(\xi)|x_0 \leqslant M(1-\varepsilon), \quad 0 < \xi < x_0.$$

由此知 $M = 0$,即在 $[0,1-\varepsilon]$ 上 $f(x) \equiv 0$. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性及 $f(x)$ 的连续性知,在 $[0,1]$ 上 $f(x) \equiv 0$.

下面的两个题目均属于这一类型,它们不难用本例的方法给予证明.

类题 1　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微，$f(0)=0$，并设有实数 $A>0$，使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立. 试证明：在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\equiv 0$　（广西大学）.

提示　设 $|f(x)|$ 在 $\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 上最大值为 M，且在点 x_0 取到，即 $|f(x_0)|=M$. 由拉格朗日中值定理，有

$$M=|f(x_0)-f(0)|=|f'(\xi)|x_0\leqslant A|f(\xi)|x_0\leqslant\frac{1}{2}M,\quad 0<\xi<x_0.$$

由此可知，$M=0$，即在 $\left[0,\frac{1}{2A}\right]$ 上 $f(x)\equiv 0$.

余下的用数学归纳法证明在一切 $\left[\frac{i-1}{2A},\frac{i}{2A}\right](i=1,2,\cdots)$ 上恒有 $f(x)\equiv 0$. 从而在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv 0$.

类题 2　设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在 (a,b) 内可微，且 $g(a)=0$. 若有实数 $\lambda\neq 0$，使得

$$|g(x)\cdot f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|,x\in(a,b)$$

成立. 试证明：在 $[a,b]$ 上 $g(x)\equiv 0$　（浙江大学）.

提示　由所给的不等式可知，

$$|g'(x)|\leqslant\frac{1+|f(x)|}{|\lambda|}\cdot|g(x)|\leqslant A|g(x)|,$$

其中 $A=\max\limits_{x\in[a,b]}\left\{\frac{1+|f(x)|}{|\lambda|}\right\}$.

注 3.7　在类题 1 的证明过程中，我们用了逐步延拓思想. 这种思想在微分方程和解析函数论中会经常用到，希望同学们仔细领会它.

例 3.37　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：$\forall a\in[0,1]$，$\exists\xi\in[0,1]$，使 $f'(\xi)=a$.

证明　在 $[0,1]$ 上对 $f(x)$ 应用拉格朗日中值定理，$\exists\eta\in(0,1)$，使 $f'(\eta)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$. $\forall a\in(0,1)$，即 $f'(0)<a<f'(\eta)$，由达布定理知，$\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=a$. 而当 $a=0$ 和 $a=1$ 时，结论显然成立.

类题　设

$$f(x)=\begin{cases}|x|, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

证明：不存在一个函数以 $f(x)$ 为其导函数（中科院）.

提示　用反证法. 假设 $F(x)$ 以 $f(x)$ 为导函数，即 $F'(x)=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$. 而 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}|x|=0\neq 1=f(0)$，即 $f(x)$ 以 $x=0$ 为第一类间断点. 这与达布定

理矛盾.

例 3.38 设函数$f(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上二次可微,且有界. 证明:$\exists x_0 \in (-\infty,+\infty)$,使得$f''(x_0)=0$ (武大).

证明 若$f''(x)$变号,由导数的介值性,$\exists x_0 \in (-\infty,+\infty)$,使得$f''(x_0)=0$.

下证:在题目的条件下,$f''(x)$必变号.

若不然,不妨设$f''(x)>0$,则$f'(x)$严格↑. 取$\eta \in (-\infty,+\infty)$使$f'(\eta)\neq 0$.

若$f'(\eta)>0$,则当$x>\eta$,并令$x\to+\infty$时,有

$$f(x)=f(\eta)+f'(\xi)(x-\eta)>f(\eta)+f'(\eta)(x-\eta)\to+\infty;$$

若$f'(\eta)<0$,则当$x<\eta$,并令$x\to-\infty$时,有

$$f(x)=f(\eta)+f'(\xi)(x-\eta)>f(\eta)+f'(\eta)(x-\eta)\to+\infty.$$

这与$f(x)$有界性假设相矛盾.

对$f''(x)<0$,可类似地证明.

例 3.39 设$a>1$,函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$可微. 证明:存在趋向于无穷的正数列$\{x_n\}$,使得

$$f'(x_n)<f(ax_n),n=1,2,\cdots.$$

证明 用反证法. 若结论不成立,则存在$x_0>0$,使得当$x\geqslant x_0$时,有$f'(x)\geqslant f(ax)>0$. 由此可知,当$x>x_0$时,$f(x)$严格递增. 注意到$a>1$,由微分中值定理,有

$$f(ax)-f(x)=f'(\xi)(a-1)x\geqslant f(a\xi)(a-1)x>f(ax)(a-1)x.$$

但这对于$x>\dfrac{1}{a-1}$是不可能成立的.

四、泰勒公式

1. 带有佩亚诺(Peano)型余项的泰勒公式:设$f(x)$在x_0点n阶导数存在,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),(x\to x_0).$$

2. 带有格拉朗日型余项的泰勒公式:设$f(x)$在(a,b)内有连续的n阶导数,$n+1$阶导数$f^{(n+1)}(x)$存在,$x,x_0\in(a,b)$,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ介于x_0与x之间.

带有佩亚诺型余项的泰勒公式要求$x\to x_0$,而带有拉格朗日型余项的泰勒公式没有这个要求. 这也导致了两类公式在证明上的巨大差异,前者可用洛必达法则证明,而后者要用柯西中值定理证明. 另外,在使用上前者主要用于定性分析,后者

主要用于定量计算. 如,应用泰勒展开计算极限,就不需要对余项作定量的计算,因此,用佩亚诺型余项即可.

显然,当 $x \to x_0$ 时满足拉格朗日型余项蕴含着满足佩亚诺型余项.

当遇到与高阶导数(二阶以上)有关的命题时,一般应考虑用泰勒公式. 一个困难而关键的问题是:如何选取点 x_0 ? 一般来说,选取使 $f^{(i)}(x_0) = 0(i = 1,2,\cdots,k)$ 的点,比如 $f(x)$ 的极值点等.

3. 基本公式(带有佩亚诺型余项).

(1) $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$;

(2) $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2})$;

(3) $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1})$;

(4) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$;

(5) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$.

例 3.40　设 $f(x)$ 在原点的邻域内二次可导,且

$$\lim_{x\to 0}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^3.$$

(1)求 $f(0), f'(0), f''(0)$;

(2)求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1 + \dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解　将 $f(x)$ 在点 0 展开成带有佩亚诺型余项的泰勒公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2).$$

(1) $\left(1 + x + \dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left(1 + x + \dfrac{f(0)}{x} + f'(0) + \dfrac{1}{2}f''(0)x + o(x)\right)^{\frac{1}{x}}$, 由已知的极限,必须有 $f(0) = f'(0) = 0$. 于是有

$$\begin{aligned}\left(1 + x + \frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}} &= \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}f''(0) + o(1)\right)x\right]^{\frac{1}{x}} \\ &= \left\{\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}f''(0) + o(1)\right)x\right]^{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}f''(0)+o(1)\right)x}}\right\}^{\left(1+\frac{1}{2}f''(0)+o(1)\right)} \\ &\to e^{1+\frac{1}{2}f''(0)} \quad (x\to 0).\end{aligned}$$

由此可得 $1 + \dfrac{1}{2}f''(0) = 3$,即 $f''(0) = 4$.

(2)由(1)有

$$\left(1+\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}$$

$$=\left\{[1+(2+o(1))x]^{\frac{1}{(2+o(1))x}}\right\}^{(2+o(1))}\to e^2 \quad (x\to 0).$$

例 3.41 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$. 证明:存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to 0$ 时, $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小(数学Ⅱ).

解 由泰勒公式可知,当 $h\to 0$ 时,有

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+\frac{1}{2}f''(0)h^2+o(h^2),$$

$$f(2h)=f(0)+2f'(0)h+2f''(0)h^2+o(h^2),$$

$$f(3h)=f(0)+3f'(0)h+\frac{9}{2}f''(0)h^2+o(h^2).$$

于是

$$\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$$

$$=(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3-1)f(0)+(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3)f'(0)h+$$

$$\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)h^2+o(h^2).$$

由题意, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 应满足下面的代数方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

由方程组的理论易知,关于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的方程组存在唯一的解,即存在唯一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使当 $h\to 0$ 时, $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

例 3.42 确定常数 a,b,使当 $x\to 0$ 时, $f(x)=e^x-\frac{1+ax}{1+bx}$ 为 x 的 3 阶无穷小.

证明 $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad (x\to 0)$,

$$\frac{1}{1+bx}=1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3),(x\to 0)(|b|<1).$$

于是

$$f(x)=\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)-(1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3))$$

$$=(1-a+b)x+\left[\frac{1}{2}+(a-b)b\right]x^2+\left[\frac{1}{6}-(a-b)b^2\right]x^3+o(x^3).$$

欲使$f(x)$为三阶无穷小量,必须有

$$\begin{cases}1-a+b=0,\\ \frac{1}{2}+(a-b)b=0,\\ \frac{1}{6}-(a-b)b^2\neq 0.\end{cases}$$

解之得　$a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{2}$.

例 3.43　设$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}$,求$f^{(5)}(0)$.

解　$f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1+x}}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x}{1+x}}$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{e}\left[1+\left(-\frac{x}{1+x}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^3+\right.\\&\left.\frac{1}{4!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(-\frac{x}{1+x}\right)^5+o(x^5)\right]\\&=\mathrm{e}\left[1-x(1-x+x^2-x^3+x^4+o(x^4))+\right.\\&\frac{1}{2}x^2(1-x+x^2-x^3+o(x^3))^2-\\&\frac{1}{6}x^3(1-x+x^2+o(x^2))^2+\frac{1}{24}x^4(1-x+o(x))^4-\\&\left.\frac{1}{120}x^5(1+o(1))^5+o(x^5)\right]\\&=\mathrm{e}\left[\cdots+\left(-1-2-1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}\right)x^5+o(x^5)\right]\\&=\mathrm{e}\left[\cdots+\left(-\frac{499}{120}\right)x^5+o(x^5)\right]\quad(x\to 0).\end{aligned}$$

所以

$$f^{(5)}(0)=5!\cdot\left(-\frac{499}{120}\right)\mathrm{e}=-499\mathrm{e}.$$

例 3.44　设$f(x)$在$[0,1]$上有二阶连续导数,且$f(0)=f(1)=0$,$\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$,证明:$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8$(北师大).

证法 1　用泰勒公式证明. 由题设$f(x)$在$[0,1]$上的最小值必在$(0,1)$内取到,即$\exists c\in(0,1)$,使$f(c)=-1$. 由费马引理知,$f'(c)=0$. 将$f(x)$在c点作泰勒展开,有

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2$$

$$= f(c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2, \quad \text{其中}\xi\text{在}x\text{与}c\text{之间.}$$

在上式中分别令 $x = 0, x = 1$ 可得

$$0 = f(0) = f(c) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2, \quad \xi_1 \in (0,c),$$

$$0 = f(1) = f(c) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2, \quad \xi_2 \in (c,1),$$

将两式相加可得

$$f''(\xi_1)c^2 + f''(\xi_2)(1-c)^2 = 4.$$

由此可知,

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x) \geqslant \frac{4}{c^2 + (1-c)^2},$$

注意到 $\frac{1}{2} \leqslant c^2 + (1-c)^2 < 1$,可得

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x) \geqslant \max_{c\in(0,1)} \frac{4}{c^2 + (1-c)^2} = 8.$$

证法 2 用辅助多项式方法证明. 构造辅助多项式 $P(x) = 4x(x-1)$,满足条件 $P(0) = P(1) = 0$,且 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} P(x) = P\left(\frac{1}{2}\right) = -1$.

令 $F(x) = f(x) - P(x) = f(x) - 4x(x-1)$,则 $F(0) = F(1) = 0$,且 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数. 由 $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f(x) = -1$ 知,$\exists c \in (0,1)$ 使得 $f(c) = -1$.

若 $c = \frac{1}{2}$,则 $F(c) = 0$;

若 $c \neq \frac{1}{2}$,则 $F(c) = f(c) - P(c) < 0$,$F\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - P\left(\frac{1}{2}\right) > 0$,由连续函数的介值定理知,$\exists \eta \in (0,1)$,使得 $F(\eta) = 0$.

对 $F(x)$ 分别在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,1]$ 上应用罗尔定理知,$\exists \xi_1 \in (0,\eta)$ 和 $\xi_2 \in (\eta,1)$ 使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$. 再对 $F'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理知,$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)$ 使得 $F''(\xi) = 0$,即 $f''(\xi) = 8$. 从而 $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} f''(x) \geqslant 8$.

注 3.8 本例的证法 2 应用了所谓的**辅助多项式法**. 若题目的结论要求证明"$\exists \xi \in (a,b)$,使得'$f^{(n)}(\xi) = k \quad (n \geqslant 2, k \neq 0)$'或'$\max\limits_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \geqslant k$'或'$\min\limits_{x\in[a,b]} f^{(n)}(x) \leqslant k$'",那么我们可构造一个 n 次多项式 $P(x)$ 让它满足题目中 $f(x)$ 的所有条件,然后令 $F(x) = f(x) - P(x)$,最后对 $F(x)$ 多次使用罗尔定理即可. 例 3.22、3.23 用的正是这种方法.

在本例中,由结论知, $P(x)$ 应是一个二次多项式. 由 $f(0)=f(1)=0$ 可知,x 和 $(x-1)$ 都是 $P(x)$ 的因式,故可令 $P(x)=Ax(x-1)(A>0$,待定). 再由 $\min\limits_{x\in[0,1]}P(x)=-1$ 可得 $A=4$,从而 $P(x)=4x(x-1)$.

下面再看两个这类题目.

类题 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(-1)=0$, $f(1)=1, f'(0)=0$. 证明: $\exists\xi\in(-1,1)$,使 $f'''(\xi)=3$　(数学Ⅱ).

分析　由结论知,这里的辅助多项式 $P(x)$ 是三次的. 又由 $f(-1)=0$ 知,可设 $P(x)=(x+1)(Ax^2+Bx+C)$, 其中 A,B,C 待定. 这里有三个常数要确定,但仅要求 $P(1)=1, P'(0)=0$ 是不够的,为此我们附加条件 $P(0)=f(0)$ (这是为了使 $F(x)$ 能在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上应用罗尔定理). 通过简单计算可求得

$$P(x)=(x+1)\left(\frac{1}{2}x^2-f(0)x+f(0)\right).$$

类题 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数,且 $f(0)=1$, $f(1)=2$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$. 证明: $\exists\xi\in(0,1)$,使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$ (数学Ⅰ,副题).

分析　这里 $P(x)$ 是三次的,设为 $P(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$. 由题设条件让 $P(x)$ 满足 $P(0)=1, P(1)=2, P'\left(\frac{1}{2}\right)=0$ 和附加条件 $P\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$,可得

$$P(x)=4x^3-4f\left(\frac{1}{2}\right)x^2+\left(4f\left(\frac{1}{2}\right)-3\right)x+1.$$

另外,这两个类题仿本例的证法 1 用泰勒公式做也不复杂,请同学们一试.

例 3.45　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有一阶连续导数,证明存在 $c\in(0,1)$, 使

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)+\frac{1}{2}f'(c).$$

分析　这个题目乍一看起来无从下手,因为中值定理无法直接将导数和积分联系起来,而泰勒公式似乎也无法应用. 但是不要忘记了 $f(x)$ 的原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 这样就可将结论改写成

$$F(1)=F'(0)+\frac{1}{2}F''(c),$$

问题就变得明了啦! 这是处理这类问题的常用手段.

证明　令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数. 对 $F(x)$ 应用泰勒公式,有

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2}F''(c)x^2, c\in(0,x).$$

在上式中取 $x=1$, 即得

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(0) + \frac{1}{2}f'(c), c \in (0,1).$$

例 3.46 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上二次可微，$|f(x)| \leqslant 1$，$|f''(x)| \leqslant 1$，$\forall x \in [0,2]$. 证明：$\forall x \in [0,2]$，有 $|f'(x)| \leqslant 2$（东南大学）.

证明 将 $f(x)$ 在 x 点作泰勒展开，得

$$f(0) = f(x) + f'(x)(0-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)x^2, \quad \xi_1 \in (0,x),$$

$$f(2) = f(x) + f'(x)(2-x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(2-x)^2, \xi_2 \in (x,2).$$

将上两式相减，得

$$2f'(x) = f(2) - f(0) - \frac{1}{2}[f''(\xi_2)(2-x)^2 - f''(\xi_1)x^2],$$

即

$$|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}[|f(2)| + |f(0)|] + \frac{1}{4}[|f''(\xi_2)|(2-x)^2 + |f''(\xi_1)|x^2]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left[2 + \frac{x^2 + (2-x)^2}{2}\right] \leqslant 2,$$

其中 $x^2 + (2-x)^2$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 4.

类题 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $|f(x)| \leqslant a$，$|f''(x)| \leqslant b$，c 是 $(0,1)$ 内任一点，则 $|f'(c)| \leqslant 2a + \frac{b}{2}$.

类题 2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1) = f(0)$，$|f''(x)| \leqslant M$. 证明：$\forall x \in [0,1]$，有 $|f'(x)| \leqslant \frac{M}{2}$ （上海师大）.

下面的两个例子是例 3.47 在无限区间上的推广.

例 3.47 设 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上二次可微，且 $|f(x)|$，$|f''(x)|$ 在 $(a, +\infty)$ 上分别有有限的上确界 M_0, M_2. 证明 $|f'(x)|$ 在 $(a, +\infty)$ 上也有界且其上确界 M_1 满足不等式

$$M_1^2 \leqslant 4M_0M_2. \tag{1}$$

证明 若 $M_2 = 0$，则 $f''(x) = 0$. 由 $f(x)$ 有界可知，$f(x) =$ 常数，故 $M_1 = 0$，此时式(1)显然成立.

设 $M_2 > 0$，$\forall x \in (a, +\infty)$ 及 $h > 0$，由泰勒公式有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2, \xi \in (x, x+h).$$

由此可得

$$|f'(x)| = \frac{1}{h}\left|f(x+h) - f(x) - \frac{1}{2}f''(\xi)h^2\right|$$

$$\leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2, \forall h > 0.$$

记

$$g(h) = \frac{2M_0}{h} + \frac{h}{2}M_2, h > 0.$$

易知，$g(h)$ 在 $h = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}}$ 处达到最小值 $2\sqrt{M_0M_2}$. 于是有

$$|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}, \forall x \in (a, +\infty),$$

对上式取上确界即得式(1).

注 3.9　式(1)通常称为内插不等式，它在实分析中经常会用到，并且系数 4 是最好的. 例如，在 $(-1, +\infty)$ 上考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & -1 < x < 0, \\ \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, & 0 \leqslant x < +\infty. \end{cases}$$

容易验证：$M_0 = 1, M_1 = 4, M_2 = 4$，即 $M_1^2 = 4M_0M_2$. 若取 $c < 4$，对这个函数来说，将有

$$M_1^2 > cM_0M_2.$$

也就是说，若式(1)中的系数小于 4，那么式(1)将可能不再成立.

例 3.48　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二次可微，且

$$M_k = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f^{(k)}(x)| < +\infty, (k = 0,1,2).$$

证明：$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$（北大）.

证明　对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 及任意的实数 h，由泰勒公式，有

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)h^2, \xi_1 \text{ 在 } x \text{ 与 } x + h \text{ 之间},$$

$$f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)h^2, \xi_2 \text{ 在 } x \text{ 与 } x - h \text{ 之间}.$$

将上两式相减得

$$2hf'(x) = f(x + h) - f(x - h) + \frac{h^2}{2}[f''(\xi_2) - f''(\xi_1)],$$

所以

$$2h|f'(x)| \leqslant 2|hf'(x)| \leqslant 2M_0 + M_2h^2, \forall x, h \in \mathbf{R}.$$

固定 h，对上式关于 x 取上确界，可得

$$M_2h^2 - 2M_1h + 2M_0 \geqslant 0, \forall h \in \mathbf{R}.$$

上式是关于 h 的二次三项式，由其判别式 $\Delta \leqslant 0$ 可得

$$M_1^2 \leqslant 2M_0M_2.$$

例 3.49 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三阶导数,并且 $f(x)$, $f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 证明:$f'(x)$ 和 $f''(x)$ 也在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界(北师大).

证明 设 $|f(x)|\leqslant M_0$, $|f'''(x)|\leqslant M_3$, 由泰勒公式,有

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),\text{其中 }\xi_1\text{ 在 }x\text{ 与 }x+1\text{ 之间,} \tag{1}$$

$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{1}{2}f''(x)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2),\text{其中 }\xi_2\text{ 在 }x-1\text{ 与 }x\text{ 之间,} \tag{2}$$

式(1)+式(2)可得

$$f(x+1)+f(x-1)=2f(x)+f''(x)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)],$$

故

$$|f''(x)|\leqslant 4M_0+\frac{1}{3}M_3,\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

至于 $f'(x)$ 的有界性,可利用已证得 $f''(x)$ 有界和上例的结论立即可得,或直接证明. 将式(1)-式(2)可得

$$f(x+1)-f(x-1)=2f'(x)+\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)],$$

故

$$|f'(x)|\leqslant M_0+\frac{1}{6}M_3,\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

例 3.50 设 $f(x)$ 有二阶连续导数,且 $\forall x\in\mathbf{R}$, $\forall h>0$, 成立

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x)\geqslant 0.$$

证明:$\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x)\geqslant 0$(北师大).

证明 将 $f(x\pm h)$ 在 x 处作泰勒展开,有

$$f(x\pm h)=f(x)\pm f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+o(h^2).$$

将上两式相加,并除以 h^2,由所给的不等式可得

$$f''(x)+o(1)\geqslant 0.$$

令 $h\to 0^+$,有 $f''(x)\geqslant 0$.

例 3.51 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在三阶连续导数,且 $\forall h>0$, 有

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'\left(x+\frac{h}{2}\right),$$

证明:$f(x)$ 至多是二次多项式.

证明 只需证:$f'''(x)\equiv 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

将$f(x+h)$，$f'\left(x+\frac{h}{2}\right)$在$x$处作泰勒展开

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)h^3,\quad \xi\in(x,x+h),$$

$$f'\left(x+\frac{h}{2}\right)=f'(x)+f''(x)\frac{h}{2}+\frac{f'''(\eta)}{2}\cdot\frac{h^2}{4},\quad \eta\in\left(x,x+\frac{h}{2}\right).$$

将上两式代入所给的等式中，比较两端可得

$$f'''(\xi)=\frac{3}{4}f'''(\eta).$$

当$h\to 0$时，有$\xi,\eta\to x$. 由三阶导数的连续性，有

$$f'''(x)=\frac{3}{4}f'''(x),\text{即}f'''(x)=0,\forall x\in\mathbf{R}.$$

例 3.52　若$f(x)$在$\mathbf{R}$上存在任意阶导数，且$\exists L>0,\forall x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$|f^{(n)}(x)|\leqslant L$. 又$\forall n\in\mathbf{N}_+$，有$f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，证明：$f(x)\equiv 0,\forall x\in\mathbf{R}$.

证明　因为$f(x)$在点0处连续，所以$f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

对$f(x)$在$\left[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right](n=1,2,\cdots)$上应用罗尔定理，$\exists\xi_n\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$，$\xi_n\to 0(n\to\infty)$，使$f'(\xi_n)=0\quad(n=1,2,\cdots)$.

又因为$f'(x)$在0点连续，所以$f'(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$.

同理可证：$\forall n\in\mathbf{N}_+,f^{(n)}(0)=0$.

$\forall x\in\mathbf{R}$，将$f(x)$在点0处展开成泰勒公式，有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\\&=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(0<\theta<1).\end{aligned}$$

而

$$|f(x)|\leqslant\frac{|f^{(n+1)}(\theta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant L\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}=0$可知，$f(x)=0$. 于是$\forall x\in\mathbf{R}$，都有$f(x)=0$.

下面看一个难度大些的题目.

例 3.53　设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上二次可微，$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$.

(1)　试证存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|,\tag{1}$$

说明系数4是最好的,即对任何 $M>4$,总可找一具体的 $[a,b]$ 及其上满足条件的 $f(x)$,使对一切 $\xi\in(a,b)$,都有

$$|f''(\xi)|<\frac{M}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|;$$

(2) 如果再设 $f(x)\not\equiv$ 常数,试证存在 $\eta\in(a,b)$,使

$$|f''(\eta)|>\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|\text{(南开)}. \tag{2}$$

证明 (1)将 $f(x)$ 在 $c\triangleq\frac{a+b}{2}$ 点作泰勒展开,

$$\begin{aligned}f(x)&=f(c)+f'(c)(x-c)+\frac{1}{2}f''(\xi')(x-c)^2\\&=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi')(x-c)^2,\quad\text{其中 }\xi'\text{ 在 }x\text{ 与 }c\text{ 之间.}\end{aligned}$$

在上式中分别令 $x=a,x=b$ 可得

$$f(a)=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2,\xi_1\in(a,c),$$

$$f(b)=f(c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2,\xi_2\in(c,b).$$

将上两式相减,并注意到 $(c-a)^2=(b-c)^2=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$ 可得

$$|f(b)-f(a)|\leqslant\frac{|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|}{2}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

令 $|f''(\xi)|=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}$,即得式(1)成立.

下面我们举例说明式(1)中的系数4是最好的.

取 $f(x)=x^{2+\frac{1}{2k-1}},k\in\mathbf{N}_+,x\in[-1,1]$. 显然 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上二次可微,$f'(0)=0$ 且 $f(1)-f(-1)=2$. 而

$$|f''(x)|=\left(2+\frac{1}{2k-1}\right)\left(1+\frac{1}{2k-1}\right)\cdot|x|^{\frac{1}{2k-1}}\leqslant\frac{2k(4k-1)}{(2k-1)^2},$$

欲使

$$|f''(\xi)|<\frac{M}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \tag{3}$$

成立,必须有

$$M>4\left[1+\frac{3k-1}{(2k-1)^2}\right]. \tag{4}$$

因为 $k\to\infty$ 时,$4\left[1+\frac{3k-1}{(2k-1)^2}\right]$ 单调递减趋向于4,所以无论 $M-4>0$ 多么小,都存在适当大的自然数 k,使得式(4)成立. 也就是说,有相应的

$f(x)$ 使得 $\forall x \in [-1,1]$，都有式(3)成立.

(2)　若$f(x) \neq$ 常数，由$f'(c) = 0$ 可知，$f'(x) \neq$ 常数，从而$f''(x) \neq 0$. 记 $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \{|f''(x)|\}$，则显然 $M > 0$.

若 $M = +\infty$，则式(2)显然成立；

若 $M < +\infty$，且 $|f''(x)| \neq M$，则有

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &= \left| \int_a^b (f'(x) - f'(c))\,\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_a^b |(f'(x) - f'(c))|\,\mathrm{d}x \\ &< M \int_a^b |x - c|\,\mathrm{d}x = M \cdot \frac{(b-a)^2}{4}. \end{aligned}$$

上面最后一个不等式出现严格不等号是因为在 $|f''(x)| \neq M$ 时，

$$|f'(x)| = |f'(x) - f'(c)| \leqslant M|x - c|$$

至少在一点成立严格不等式，而由$f'(x)$ 的连续性知，积分后便出现严格不等式；

若 $|f''(x)| \equiv M$，由$f'(x)$ 的连续性及$f'(c) = 0$ 可知，应有

$$f'(x) = \pm M(x - c),$$

所以

$$f(x) = \pm \left(\frac{M}{2}x^2 - Mcx\right) + B \quad (B \text{ 为常数}).$$

此时$f(x)$ 是以 $x = c$ 为对称轴的抛物线，故$f(a) = f(b)$，而

$$|f(b) - f(a)| = 0 < M\frac{(b-a)^2}{4}$$

是显然的.

由上确界的性质，无论哪一种情形，都存在 $\eta \in (a,b)$，使式(2)成立.

下面的例题是关于“中值点”极限性质的.

例 3.54　设$f(x)$ 在$(a-\delta, a+\delta)(\delta > 0)$ 上有 $n+1$ 阶导数且$f^{(n+1)}(a) \neq 0$ 及$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$. 由微分中值定理

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h)h, 0 < \theta < 1, |h| < \delta. \tag{1}$$

求证：$\lim\limits_{h \to 0} \theta = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$　(北师大).

证明　将$f(a+h)$ 在 a 点作带有佩亚诺型余项的泰勒展开

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1}) \\ &= f(a) + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}h^{n+1} + o(h^{n+1}). \end{aligned} \tag{2}$$

对$f'(a+\theta h)$ 在 a 点作同样的展开，有

$$f'(a+\theta h)=f'(a)+f''(a)(\theta h)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(\theta h)^{n-1}+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(\theta h)^{n}+o(h^{n})$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}(\theta h)^{n}+o(h^{n}),$$

将上式代入式(1)可得

$$f(a+h)=f(a)+\frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\theta^{n}h^{n+1}+o(h^{n+1}). \tag{3}$$

比较式(2)、式(3),并注意到$f^{(n+1)}(a)\neq 0$,有

$$\theta=\sqrt[n]{\frac{1}{n+1}+o(1)},$$

故

$$\lim_{h\to 0}\theta=\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

类题1 设$h>0$,函数f在$U(a,h)$内具有$n+2$阶连续导数,且$f^{(n+2)}(a)\neq 0$,f在$U(a,h)$内的泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^{n}+\frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!}h^{n+1},0<\theta<1.$$

证明:$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+2}$.

提示 对$f(a+h)$在a点作$(n+2)$阶泰勒展开,对$f^{(n+1)}(a+\theta h)$在a点作1阶泰勒展开.

类题2 设$f(x)$在$(-1,1)$内具有二阶连续导数,且$f''(x)\neq 0$. 证明:

(1) $\forall x\in(-1,1)$且$x\neq 0$,存在唯一的$\theta(x)\in(0,1)$,使得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x);$$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

(数学Ⅰ).

下面的例题是用高阶导数判断极值的一个非常有用的结论,希望同学们记忆它.

例3.55 设$n\geqslant 2$,$r>0$,$f^{(n)}(x)$在$[a-r,a+r]$上连续,并设$f^{(k)}(a)=0$$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,$f^{(n)}(a)\neq 0$. 证明:

(1)当n为偶数时,a是极值点;

(2)当n为奇数时,a是拐点.

证明 (1)因为$f'(x)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+o((x-a)^{n-1})$,所以

$$f'(x)(x-a)=\left[\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}+o(1)\right](x-a)^{n}. \tag{1}$$

又因$f^{(n)}(a)\neq 0$,故$\exists\delta>0$,使当$x\in U^{\circ}(a,\delta)$时,有

$$\frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}+o(1)\text{ 与 }f^{(n)}(a)\text{ 同号.}$$

由式(1)知,当n为偶数时,$f'(x)(x-a)$与$f^{(n)}(a)$在$U^{\circ}(a,\delta)$上同号,因此a为极值点.

(2)因为$f''(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2}+o((x-a)^{n-2})$,所以

$$f''(x)(x-a)=\left[\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}+o(1)\right](x-a)^{n-1}. \tag{2}$$

又因$f^{(n)}(a)\neq 0$,故$\exists\delta>0$,使当$x\in U^{\circ}(a,\delta)$时,有

$$\frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}+o(1)\text{ 与 }f^{(n)}(a)\text{ 同号.}$$

由式(2)知,当n为奇数时,$f''(x)(x-a)$在$U^{\circ}(a,\delta)$上不变号,因此$x=a$是拐点.

五、函数零点个数的讨论

在这一段中,我们将利用导数来研究函数$f(x)$零点(或方程$f(x)=0$的根)的个数. 至于函数的单调性、极值、凹凸性、拐点及函数的作图等内容在此不再赘述,这是因为同学们对这些内容并不感到困难,已无需多说. 另外,利用凸函数的性质证明不等式将在第八讲中涉及.

证明函数$f(x)$的零点的存在性常用的方法:1)若$f(x)$在$[a,b]$上或(a,b)内连续,应用连续函数的介值定理;2)作出$f(x)$的一个原函数$F(x)$,对$F(x)$应用罗尔定理.

证明函数$f(x)$的零点的唯一性常用的方法:1)利用罗尔定理,采用反证法证明$f(x)$至多只有一个零点;2)利用单调性证明$f(x)$至多只有一个零点.

这些内容已散见于前面,在此我们不把它们作为重点. 而这里着重要讨论的是函数$f(x)$零点个数问题. 一般步骤如下:

(1)求出$f(x)$的驻点和$f'(x)$不存在的点,用这些点划分$f(x)$的定义域;

(2)求出$f(x)$的单调区间和极值(最值);

(3)分析极值(最值)与x轴的相对位置,得出零点的个数.

例 3.56　设$a>0$,问方程$\ln x=ax$有几个实根?

解　令$f(x)=\ln x-ax,x\in(0,+\infty)$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-a,\quad f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0.$$

由此可知,$f(x)$是上凸函数,且$x=\frac{1}{a}$是唯一的极大值点,当然也是最大值点. 最大值为$f\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a-1$.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$，所以

当 $-\ln a - 1 < 0$，即 $a > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 无零点；

当 $-\ln a - 1 = 0$，即 $a = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有唯一零点；

当 $-\ln a - 1 > 0$，即 $0 < a < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 有两个零点.

类题 当 $a > 0, b > 0$ 时，求下列方程有两个不同正实根的条件.

(1) $\mathrm{e}^{bx} = ax^2$；　　(2) $\mathrm{e}^{bx^2} = ax^2$.

提示 (1)取对数，并令 $f(x) = bx - 2\ln x - \ln a, x > 0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$，所以要使方程有两个正实根，$f(x)$ 必须在 $(0, +\infty)$ 内有负的最小值.

由 $f'(x) = b - \dfrac{2}{x}$ 可知，$x_0 = \dfrac{2}{b}$ 为唯一驻点，而 $f''(x) = \dfrac{2}{x^2} > 0$，所以 $x_0 = \dfrac{2}{b}$ 为极小值点，也是最小值点. 最小值为

$$f\left(\frac{2}{b}\right) = \ln \frac{b^2\mathrm{e}^2}{4a}.$$

让 $f\left(\dfrac{2}{b}\right) < 0$，即 $\dfrac{b^2\mathrm{e}^2}{4a} < 1$ 就是原方程有两个不同正实根的条件.

(2)原方程有两个不同正实根的条件为：$\dfrac{a}{b} > \mathrm{e}$.

说明：不取对数不易解出驻点.

例 3.57 设当 $x > 0$ 时，方程 $kx + \dfrac{1}{x^2} = 1$ 有且仅有一个根，求 k 的取值范围(数学Ⅲ).

解 令 $f(x) = kx + \dfrac{1}{x^2} - 1, x \in (0, +\infty)$，则

$$f'(x) = k - \frac{2}{x^3},\quad f''(x) = \frac{6}{x^4} > 0.$$

当 $k \leqslant 0$ 时，$f'(x) < 0$，$f(x)$ 严格单调递减，又注意到

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} -\infty, & k < 0, \\ -1, & k = 0. \end{cases}$$

所以，当 $k \leqslant 0$ 时，$f(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 内仅有一个根；

当 $k > 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是下凸函数，且 $x = \sqrt[3]{\dfrac{2}{k}}$ 是唯一极小值点，

也是最小值点. 而

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

所以,当最小值为零,即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right) = k\sqrt[3]{\frac{2}{k}} + \sqrt[3]{\frac{k^2}{4}} - 1 = 0$$

时, $f(x) = 0$ 有且仅有一个根. 由上式解得 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$. 当 $k \neq \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时, $f(x) = 0$ 或无解或有两个解.

综上知,当 $k \leqslant 0$ 及 $k = \frac{2}{9}\sqrt{3}$ 时,方程有且仅有一个实根.

类题　证明方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有两个实根　(数学Ⅰ).

例 3.58　讨论曲线 $y = 4\ln x + k$ 与 $y = 4x + \ln^4 x$ 的交点个数　(数学Ⅱ).

解　令 $f(x) = \ln^4 x - 4\ln x + 4x - k$,则

$$f'(x) = \frac{4(\ln^3 x - 1 + x)}{x},$$

令 $f'(x) = 0$,得 $x = 1$ 为唯一驻点,而由

$$f''(x) = \frac{12\ln^2 x - 4\ln^3 x + 4}{x^2},$$

$$f''(1) = 4 > 0$$

知, $x = 1$ 为极小值点,当然也是最小值点,且最小值 $f(1) = 4 - k$.

由于 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, 所以

当 $4 - k > 0$ 即 $k < 4$ 时, $f(x) = 0$ 无根;

当 $4 - k = 0$ 即 $k = 4$ 时, $f(x) = 0$ 有一个根;

当 $4 - k < 0$ 即 $k > 4$ 时,当 x 从 0 变到 1 时, $f(x)$ 由正变负, $f(x) = 0$ 有一个根;当 x 从 1 变到 $+\infty$ 时, $f(x)$ 由负变正, $f(x) = 0$ 有一个根. 故当 $k > 4$ 时, $f(x) = 0$ 有两个根.

第四讲　一元函数的积分学

在这一讲中,我们将涉及不定积分的求法、定积分的计算、可积性条件、广义积分等以及它们的应用;涉及的重要理论有函数的可积性定理、积分中值定理、微积分基本定理和广义积分的审敛法等.

一、不定积分的计算

不定积分是数学分析中最重要的内容之一,对常规的求解方法——第一换元法(凑微分法)、第二换元法、分部积分法和万能代换等要非常熟练地掌握;对带有技巧性的解法,只有多做多练方能领会和掌握,正所谓熟能生巧! 在此,我们不打算对不定积分的各种解法逐一讲解,而只是想通过典型题目介绍一些技巧. 也许,大家会感觉到在内容上缺乏系统性,这正是由这门课的性质所决定的!

例 4.1　求下列不定积分

(1) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(x+1)}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$.

解　(1)由于 $(x\ln x)' = 1+\ln x$,所以

$$\text{原积分} = \int \frac{(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x\ln x} + C.$$

(2)由于 $[\ln(1+x)-\ln x]' = -\frac{1}{x(1+x)}$,所以

$$\text{原积分} = -\int [\ln(1+x)-\ln x][\ln(1+x)-\ln x]'\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln x]^2 + C.$$

(3)由于 $(\sin x-\cos x)' = \sin x+\cos x$,所以

$$\text{原积分} = \int \frac{(\sin x-\cos x)'}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}(\sin x-\cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$$

例 4.2　求下列不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$;　　(2) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$.

解　(1)原积分 $=\int \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$

$=2\arcsin\sqrt{x}+C$.

(2)原积分 $=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})$

$=(\arctan\sqrt{x})^2+C$.

(3)原积分 $=\frac{1}{2}\int\tan\sqrt{1+x^2}\,\frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}=\int\tan\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{1+x^2})$

$=-\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right|+C$.

例 4.3　求下列不定积分

(1) $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(2+x^{10})}$.

解　(1)原积分 $=\int\frac{(1-x^7)}{x^7(1+x^7)}x^6\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\frac{(1-x^7)}{x^7(1+x^7)}\mathrm{d}(x^7)$

$\xlongequal{令\,x^7=t}\frac{1}{7}\int\frac{1-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t$

$=\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{(1+x^7)^2}\right|+C$.

(2)原积分 $=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10})}{x^{10}(2+x^{10})}\xlongequal{令\,x^{10}=t}\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}t}{t(2+t)}$

$=\frac{1}{20}\ln\frac{x^{10}}{2+x^{10}}+C$.

例 4.4　求下列不定积分

(1) $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\mathrm{e}^{\sin x}\,\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\mathrm{e}^{-\sin x}\,\frac{\sin 2x}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}\mathrm{d}x$.

解　(1)原积分 $=\int\frac{x+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(2)原积分 $= \frac{1}{2}\int \frac{2\sin x\cos x + 1 - 1}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x}$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} + C$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \csc\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + C.$$

(3)原积分 $= \int \frac{2(\cos x - \sin x)}{1 + (\sin x + \cos x)^2}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{1 + (\sin x + \cos x)^2}$

$$= 2\arctan(\sin x + \cos x) + C.$$

(4)原积分 $= \int x\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$= \int x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\sin x}) - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \mathrm{e}^{\sin x}(x - \sec x) + C.$$

(5) 原积分 $= \int \mathrm{e}^{-\sin x}\frac{2\sin x\cos x}{\left[\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{2}\right]^2}\mathrm{d}x$

$$= 8\int \mathrm{e}^{-\sin x}\frac{(-\sin x)}{(1 - \sin x)^2}\mathrm{d}(-\sin x)$$

$$\xrightarrow{\text{令 } t = -\sin x} 8\int \mathrm{e}^t\frac{t}{(1 + t)^2}\mathrm{d}t$$

$$= -8\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}\left(\frac{1}{1 + t}\right)$$

$$= \frac{8\mathrm{e}^t}{1 + t} + C$$

$$= \frac{8\mathrm{e}^{-\sin x}}{1 - \sin x} + C.$$

例 4.5　求下列不定积分

(1) $\int \sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int \sqrt{\dfrac{x}{1-x\sqrt{x}}}\mathrm{d}x$.

解　(1)令 $t=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,则 $\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$, 所以

$$\begin{aligned}\text{原积分}&=\int\sqrt{t}\mathrm{d}t=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C\\&=\frac{2}{3}[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^{\frac{3}{2}}+C.\end{aligned}$$

(2)令 $t=\sqrt{1-x\sqrt{x}}$,通过计算可得

$$\text{原积分}=-\frac{4}{3}\int\mathrm{d}t=-\frac{4}{3}\sqrt{1-x\sqrt{x}}+C.$$

注 4.1　处理这类题目的一个基本原则是:选择最复杂的式子作为新的变量,这样就可把它去掉!

例 4.6　求 $\int\dfrac{3\sin x+4\cos x}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　注意到 $(2\sin x+\cos x)'=2\cos x-\sin x$, 可令

$$3\sin x+4\cos x=a(2\sin x+\cos x)+b(2\cos x-\sin x)$$

解之得　$a=2,b=1$, 从而有

$$\begin{aligned}\text{原积分}&=\int\frac{2(2\sin x+\cos x)+(2\cos x-\sin x)}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=\int 2\mathrm{d}x+\int\frac{(2\sin x+\cos x)'}{2\sin x+\cos x}\mathrm{d}x\\&=2x+\ln|2\sin x+\cos x|+C.\end{aligned}$$

注 4.2　本例的解法为形如 $\int\dfrac{c\sin x+d\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$　$(bc\neq ad)$ 的不定积分提供了一般的解法.

例 4.7　求 $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$　$(a<b)$.

解　由于 $\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{b-x}{b-a}=1$, 故可令

$$\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t,\quad \frac{b-x}{b-a}=\cos^2 t.$$

于是有

$$\mathrm{d}x=2(b-a)\sin t\cos t\mathrm{d}t,$$

从而　　$\text{原积分}=2\int\mathrm{d}t=2t+C$

$$= 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C.$$

本例的解法十分依赖题目的结构,若用第二换元法求解,那将是非常复杂的.

例 4.8 求下列不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$; (2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+a\cos x}(a>0)$;

(3)已知 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 内满足

$$f'(x) = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x},$$

求 $f(x)$(第一届全国大学数学竞赛(非数学类)决赛试题).

解 (1)当 $a-b=k\pi$ 时,原积分 $=(-1)^k\int \csc^2(x+a)\mathrm{d}x = (-1)^{k+1}\cot(x+a)+C$;

当 $a-b\neq k\pi$ 时,由 $\sin(a-b) = \sin[(x+a)-(x+b)]$

$$= \sin(x+a)\cos(x+b) - \cos(x+a)\sin(x+b)$$

可知,

$$\text{原积分} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin(x+a)\cos(x+b)-\cos(x+a)\sin(x+b)}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int[\cot(x+b)-\cot(x+a)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C.$$

(2)当 $a=1$ 时,原积分 $=\int \sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\frac{x}{2}+C$;

当 $a\neq 1$ 时,

$$\text{原积分} = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+a\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{(1+a)+(1-a)\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{1-a^2}}\arctan\sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}\tan\dfrac{x}{2}+C, & 0<a<1, \\ \dfrac{2}{\sqrt{a^2-1}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+1}+\sqrt{a-1}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{a+1}-\sqrt{a-1}\tan\frac{x}{2}}\right|+C, & a>1. \end{cases}$$

$$(3)\ f(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\sin 2x\right)}$$

$$\xrightarrow{令\ t = x - \frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\left(1 - \frac{1}{2}\cos 2t\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 t\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{\cos^2 t\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos^2 t\right)}$$

$$\xrightarrow{令\ u = \sin t} \sqrt{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{(1 - u^2)(2 + u^2)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \int \left(\frac{1}{1 - u^2} + \frac{1}{2 + u^2}\right) \mathrm{d}u$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + u}{1 - u}\right| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{6}\ln\frac{1 + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + C,$$

这里注意到了在$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$内，$1 - \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

例 4.9　求下列不定积分

$$(1) \int \frac{x\mathrm{e}^x}{(x + 1)^2}\mathrm{d}x; \qquad (2) \int \frac{\ln x}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x.$$

解　(1)原积分 $= -\int x\mathrm{e}^x \mathrm{d}\left(\frac{1}{1 + x}\right)$

$$= -\frac{x\mathrm{e}^x}{1 + x} + \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x} + C.$$

(2)原积分 $= \int \ln x \mathrm{d}\left(\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right) = \frac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 + x^2}}$

$$= \frac{x\ln x}{\sqrt{1 + x^2}} - \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

注 4.3　这两个题目都是用分部积分法求解的. 如果说第一个题目中 u, v 的选

取能观察出来的话,那么第二个题目就很难了! 对此我们可采用如下方法处理:取 $u=\ln x, \mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,而

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}v &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \xlongequal{令\, x=\tan t} \int \cos t \mathrm{d}t = \sin t + C\\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C,\end{aligned}$$

这样就可取 $v=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

再如,要计算 $\int \dfrac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$. 取 $u=\arccos x, \mathrm{d}v=\dfrac{x^3\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$, 此时

$$\begin{aligned}\int \mathrm{d}v &= \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}(1-x^2)\\ &= -\int x^2 \mathrm{d}(\sqrt{1-x^2}) = -\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2} + C,\end{aligned}$$

故取 $v=-\dfrac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}$.

在这里还要提醒同学们注意的是:在被积函数中若出现了 $\ln x$, $\arcsin x$, $\arctan x$ 等函数时,一般要选取它们作为 u. 这是因为通过求导可将这些符号去掉!

例 4.10 求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} &= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+1)-(x^2-1)}{1+x^4}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{1+x^4}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{1+x^4}\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{\Delta} I_1 - I_2.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + C_1,\end{aligned}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C_2.$$

于是

$$\text{原积分} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2}x} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - \sqrt{2}x + 1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right| + C.$$

类题　求下列不定积分

(1) $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$;　　(2) $J = \int \sqrt{\tan x}\, \mathrm{d}x$;

(3) $K = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}$.

提示　(1) 令 $t^2 = \tan x$, 则原积分化为

$$I = 2 \int \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^4}.$$

由例 4.10 可得

$$I = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\tan x - 1}{\sqrt{2\tan x}} + \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{2\tan x} + 1}{\tan x - \sqrt{2\tan x} + 1} \right| + C.$$

(2) 令 $t^2 = \tan x$, 则

$$J = 2 \int \frac{t^2}{1 + t^4} \mathrm{d}t$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\tan x + \sqrt{2\tan x} + 1}{\tan x - \sqrt{2\tan x} + 1} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{\sqrt{2\tan x}}{1 - \tan x} + C.$$

(3) $K = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \mathrm{d}x = \int \frac{\tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x}{\tan^4 x + 1} \mathrm{d}x$

$$= \int \frac{\tan^2 x + 1}{\tan^4 x + 1} \mathrm{d}(\tan x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{2}\tan x} + C.$$

例 4.11　设 $P_n(x)$ 是 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x - a)^{n+1}} \mathrm{d}x.$$

解　将 $P_n(x)$ 在 a 点作泰勒展开

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

于是有

$$\int \frac{P_n(x)}{(x - a)^{n+1}} \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x - a)^{n-k+1}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \int \frac{\mathrm{d}x}{x - a}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a| + C.$$

例 4.12 设 n 次多项式 $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，其系数满足关系式 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!} = 0$，证明：不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

证明 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx = \int a_0 e^x dx + \int\left(\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right)e^x dx$. 由此可见，只需计算 $a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx\ (i = 2,\cdots,n)$ 即可.

而
$$\begin{aligned} a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx &= -\frac{a_i}{i-1}\int e^x d\left(\frac{1}{x^{i-1}}\right) \\ &= -\frac{a_i e^x}{(i-1)x^{i-1}} + \frac{a_i}{i-1}\int\frac{e^x}{x^{i-1}}dx \\ &= \cdots \\ &= -\frac{a_i e^x}{(i-1)x^{i-1}} - \frac{a_i}{(i-1)(i-2)}\cdot\frac{e^x}{x^{i-2}} - \cdots - \frac{a_i}{(i-1)(i-2)\cdot\cdots\cdot 2}\cdot \\ &\quad \frac{e^x}{x^2} + \frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx \\ &\triangleq f_i(x) + \frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx, \text{ 其中 } f_i(x) \text{ 是初等函数.} \end{aligned}$$

所以
$$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx = a_0 e^x + \sum_{i=2}^{n} f_i(x) + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx.$$

显然，当 $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!} = 0$ 时，$\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

例 4.13 求 $\int\max\{1,|x|\}dx$.

解 由于
$$\max\{1,|x|\} = \begin{cases} -x, & x < -1, \\ 1, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$$

所以
$$\int\max\{1,|x|\}dx = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + C_1, & x < -1, \\ x + C_2, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + C_3, & x > 1. \end{cases}$$

由原函数的连续性,若记 $C_2 = C$,则 $C_1 = -\frac{1}{2} + C, C_3 = \frac{1}{2} + C$. 故

$$\int \max\{1, |x|\}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + C, & x < -1, \\ x + C, & -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} + C, & x > 1. \end{cases}$$

注 4.4　对分段函数 $f(x)$ 求原函数(或不定积分) $F(x)$,虽然是逐段求出的,但必须有 $F'(x) = f(x)$. 为此 $F(x)$ 首先应该连续,这样就可利用 $F(x)$ 在分段点的连续性确定出各常数之间的关系. 像本例,由 $F(x)$ 在 $x = -1$ 处的连续性可得 $F(-1-0) = F(-1+0) = F(-1)$,即 $-\frac{1}{2} + C_1 = -1 + C$,故 $C_1 = -\frac{1}{2} + C$.

由 $F(x)$ 在 $x = 1$ 处的连续性可得 $F(1-0) = F(1+0) = F(1)$,即 $1 + C = \frac{1}{2} + C_3$,故 $C_3 = \frac{1}{2} + C$.

例 4.14　设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y) = x^2$ 所确定的隐函数,试求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$.

解　欲将 y 从所给的方程中解出来是非常困难的,甚至是不可能的! 因此,我们必须引入参数形式. 令 $y = tx$,代入所给的方程可得 $x = \frac{1}{t^2(1-t)}$,则 $y = \frac{1}{t(1-t)}, \mathrm{d}x = \frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$,故

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} &= \int \left(3 - \frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t = 3t - 2\ln t + C \\ &= \frac{3y}{x} - 2\ln\frac{y}{x} + C. \end{aligned}$$

类题　设 $y = y(x)$ 是由方程 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ 所确定的隐函数,求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y(x^2 + y^2 + a^2)}$.

提示　令 $y = tx$,由方程可得　$x = \sqrt{2}a\frac{\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}, y = \sqrt{2}a\frac{t\sqrt{1-t^2}}{1+t^2}$,

$$\mathrm{d}x = \sqrt{2}a\frac{t^3 - 3t}{(1+t^2)^2\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t.$$

注意到 $x^2 + y^2 + a^2 = a^2\frac{3-t^2}{1+t^2}$,有

$$\text{原积分} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1} = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right| + C.$$

二、定积分的计算

1. 定积分的基本计算方法

定理 1 （牛顿-莱布尼茨公式）若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的任何原函数 $F(x)$ 都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

牛顿-莱布尼茨公式可以作如下的减弱.

命题 4.1 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且有原函数 $F(x)$（即 $F'(x) = f(x)$），则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

命题 4.2 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内除有限个点外均有 $F'(x) = f(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

命题 4.2 在下一段中我们将给予证明.

定理 2 （换元法）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，代换 $x = \varphi(t)$ 满足条件：

(1) $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上单调且有连续的导数；

(2) 当 $t \in [\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 时，$a \leqslant \varphi(t) \leqslant b$ 且 $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$，

则有 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

定积分的换元法和不定积分的换元法在形式上是类似的，但它们还存在着差异. 这是因为定积分的换元必须和积分区间联系起来，不仅要考虑换元后的积分是否好算，而且还要考虑在积分区间上所作的换元变换是否可行！相对而言，在不定积分中对此不作过多的强调，而自然认为所作的变换是在“可行”的区间上进行的.

例如，求 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2 + \sin x}$.

若令 $t = \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$，且 $x = 0, 2\pi$ 时，$t = 0$. 这样有：$I = \int_0^0 \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + t + 1} = 0$. 这是一个错误的结果，正确的解法我们将在后面给出.

定理 3 （分部积分法）若 $u(x), v(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数 $u'(x), v'(x)$，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

在使用定积分的分部积分公式时，要特别注意对右端第一项的理解，否则将会导致错误的结论. 看下面的例子：

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\ln\cos x}\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\mathrm{d}(\ln\cos x)}{\ln\cos x}=-1+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x}{\ln\cos x}\mathrm{d}x=-1+I,$$

由此导致 $0=-1$ 的谬误,问题出在什么地方呢?请同学们指出来.

2. 定积分的计算技巧

(1)设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数,a 为任意常数,则

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x;$$

$$\int_a^{a+nT}f(x)\mathrm{d}x=n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,n\in\mathbf{N}_+.$$

(2)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_a^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x\\&=\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f(x)+f(a+b-x)]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这个公式对不易求出原函数的定积分,使用起来非常有效!在后面我们将举例来说明这一点.

(3)设 $f(x)$ 在 $[-l,l](l>0)$ 上连续,则

$$\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x, & \text{当}f(x)\text{为偶函数时},\\0, & \text{当}f(x)\text{为奇函数时}.\end{cases}$$

(3)是(2)的特例.

例 4.15　求 $I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$.

分析　直接作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 导致失败的原因是:在 $[0,2\pi]$ 上上述变换不满足换元法的条件.正确的作法是,先把 $[0,2\pi]$ 分成若干个小区间,把不在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内的部分平移至其内,然后再用上述变换.

解　由于被积函数 $f(x)=\frac{1}{2+\sin x}$ 是以 2π 为周期的连续函数,故有

$$I=\int_0^{2\pi}f=\int_{-\pi}^{\pi}f=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}f+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f.$$

对 $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f$,作变换 $t = -\pi - x$, 则有

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} = -\int_{0}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(-(\pi+t))} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t},$$

即

$$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f.$$

对 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f$, 作变换 $t = \pi - x$,类似于上面,则有

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f.$$

于是有

$$I = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f.$$

令 $t = \tan\frac{x}{2}$, 则有

$$I = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+t+1} = 2\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(\arctan\sqrt{3}+\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

例 4.16 求下列定积分

(1) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^{\alpha}x}(\alpha > 0)$;　　(2) $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $K = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(4) $L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

分析 利用计算技巧的(2).

解 (1) $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}+\frac{1}{1+\tan^{\alpha}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1+\tan^{\alpha}x}+\frac{\tan^{\alpha}x}{1+\tan^{\alpha}x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(2) $J = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}+\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\sin^2 x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi - 1}{4}.$$

(3)先作变换：$x = \tan t$，则可将积分化为

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(1 + \tan t) + \ln\left(1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - t\right)\right)\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\ln(1 + \tan t) + \ln\frac{2}{1 + \tan t}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8}\ln 2.$$

(4) $$L = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^{-x}} + \frac{\sin^2 x}{1 + \mathrm{e}^{x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

用这种方法可以很快求出下面的积分.

类题　计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}}{\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{\cos x}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{x}}{1 + \mathrm{e}^{x}}\sin^4 x\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{1-x}}\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin^{2n} x}{\sin^{2n} x + \cos^{2n} x}\mathrm{d}x, n \in \mathbf{N}_+$.

例 4.17　设函数 $S(x) = \displaystyle\int_0^x |\cos t|\,\mathrm{d}t$.

(1)当 n 为正整数，且 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时，证明：

$$2n \leqslant S(x) < 2(n+1);$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{S(x)}{x}$　（数学Ⅱ）.

证明　(1)因为 $|\cos t| \geqslant 0$，且 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$，所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t \leqslant S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\,\mathrm{d}t.$$

又因为 $|\cos t|$ 是以 π 为周期的函数，所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos t|\mathrm{d}t = n\int_0^{\pi} |\cos t|\mathrm{d}t = 2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos t|\mathrm{d}t = 2(n+1),$$

所以当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时,有 $2n \leqslant S(x) < 2(n+1)$.

(2)由(1)知,当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x \to +\infty$ 可得 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{S(x)}{x} = \dfrac{2}{\pi}$.

注 4.5 本例的一般形式为:设 $f(x)$ 是以 T 为周期的非负连续函数,则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

事实上, $\forall x > 0, \exists n \in \mathbf{N}_+$,使得 $nT \leqslant x < (n+1)T$. 而 $f(x) \geqslant 0$, 故有

$$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \int_0^{(n+1)T} f(t)\mathrm{d}t = (n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

于是有

$$\frac{n}{(n+1)T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \frac{n+1}{nT}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,$$

令 $x \to +\infty$, 可得结论.

类题 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\int_0^x \{t - [t]\}\mathrm{d}t$.

例 4.18 求下列积分

(1) $I = \int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$; (2) $J = \int_{-2}^{2} \min\left\{\dfrac{1}{|x|}, x^2\right\}\mathrm{d}x$;

(3) $K = \int_0^1 \left|x - \dfrac{1}{2}\right|^5 x^n(1-x)^n\mathrm{d}x$ (解放军信息工程大学).

分析 分段函数求积分,其方法是:将积分区间从分段点分开.

解 (1) $I = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$

$$\xrightarrow{\text{令 } x = t + k\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (t + k\pi)\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{\pi} t\sin t\mathrm{d}t + k\pi\int_0^{\pi} \sin t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \pi\sum_{k=0}^{n-1} (1+2k) = n^2\pi.$$

(2)因为被积函数是偶函数,所以

$$J = 2\int_0^2 \min\left\{\frac{1}{x}, x^2\right\}\mathrm{d}x$$
$$= 2\left(\int_0^1 x^2\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$
$$= 2\left(\frac{1}{3} + \ln 2\right).$$

(3) $K \xlongequal{令 x = t + \frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^5 \left(t + \frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - t\right)^n \mathrm{d}t$

$$= (-1)^n \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |t|^5 \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)^n \mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{令 t^2 = \tau} (-1)^n \int_0^{\frac{1}{4}} \tau^2 \left(\tau - \frac{1}{4}\right)^n \mathrm{d}\tau$$
$$\xlongequal{令 u = \tau - \frac{1}{4}} (-1)^n \int_{-\frac{1}{4}}^0 u^n \left(u + \frac{1}{4}\right)^2 \mathrm{d}u$$
$$= (-1)^n \int_{-\frac{1}{4}}^0 u^n \left(u^2 + \frac{u}{2} + \frac{1}{16}\right)\mathrm{d}u$$
$$= (-1)^n \left[\frac{u^{n+3}}{n+3} + \frac{u^{n+2}}{2(n+2)} + \frac{u^{n+1}}{16(n+1)}\right]\Bigg|_{-\frac{1}{4}}^0$$
$$= \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+3}.$$

例 4.19　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x - \pi) + \sin x$ 且 $f(x) = x, x \in [0, \pi)$. 计算 $\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x$ (数学Ⅲ).

解法 1　$\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_\pi^{3\pi} [f(x - \pi) + \sin x]\mathrm{d}x$

$$= \int_\pi^{3\pi} f(x - \pi)\mathrm{d}x \xlongequal{令 t = x - \pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi f(t)\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^\pi t\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} [f(t - \pi) + \sin t]\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_\pi^{2\pi} f(t - \pi)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^\pi f(u)\mathrm{d}u \quad (令 u = t - \pi)$$
$$= \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^\pi u\mathrm{d}u = \pi^2 - 2.$$

解法 2 当 $x \in [\pi,3\pi)$ 时,有

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi + \sin x, & x \in [\pi,2\pi), \\ x - 2\pi, & x \in [2\pi,3\pi). \end{cases}$$

故 $\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\pi}^{2\pi} (x - \pi + \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{2\pi}^{3\pi} (x - 2\pi)\,\mathrm{d}x = \pi^2 - 2.$

例 4.20 计算积分

(1)设 $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$,求 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$;

(2)设 $f(x) = \int_1^{x^2} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$,求 $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x$.

分析 当被积函数中含有“变限积分”时,常用的求解方法:①分部积分法;②化成二重积分,然后交换积分的顺序.

解 (1) $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{\pi - x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{\pi - x}\sin x\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 2.$$

或用二重积分交换顺序来计算.

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t.$$

由 x,t 所满足的不等式组 $\begin{cases} 0 \leqslant t \leqslant x, \\ 0 \leqslant x \leqslant \pi, \end{cases}$ 画出积分区域的草图. 改变积分的顺序:

$$\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \mathrm{d}t \int_t^{\pi} \frac{\sin t}{\pi - t}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\pi - t}{\pi - t}\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} \sin t\,\mathrm{d}t = 2.$$

(2) $\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)$

$$= \frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^3 \mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}(-x^4) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} - 1\right).$$

或用二重积分交换顺序来计算.

由 x,t 所满足的不等式组 $\begin{cases} x^2 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$ 画出积分区域的草图. 改变积分的顺

序

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x &= -\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{x^2}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &= -\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\int_0^{\sqrt{t}} x\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right).\end{aligned}$$

三、函数的可积性理论

1. 可积的定义

函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积是指：对任一分割

$$T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \text{ 及 } \forall \xi_i \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i],$$

极限 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在，称该极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分，记为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，$\|T\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$.

记 $M_i = \sup\limits_{x\in\Delta_i}\{f(x)\}$，$m_i = \inf\limits_{x\in\Delta_i}\{f(x)\}$，则称 $\omega_i = M_i - m_i$ 为 $f(x)$ 在 Δ_i 上的振幅.

2. 可积性条件

必要条件：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

充分条件：① $[a,b]$ 上的连续函数可积；② $[a,b]$ 上的单调有界函数可积；③ $[a,b]$ 上具有有限个第一类间断点的有界函数可积；④ $[a,b]$ 上具有无限个第一类间断点，而这些间断点的聚点个数是有限个的有界函数可积.

显然④包含着③.

充要条件：

第一充要条件：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall T$，有 $\lim\limits_{\|T\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$；

第二充要条件：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists T$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon.$$

第三充要条件：有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon,\eta > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall T$，使 $\|T\| < \delta$，而振幅 $\omega_{k'} \geqslant \eta$ 的那些小区间的长度之和 $\sum\limits_{k'}\Delta x_{k'} < \varepsilon$（通俗地讲，即是振幅不能任意小的那些小区间的长度可以任意小）.

例 4.21　证明：黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{p}, & x=\dfrac{q}{p},(p,q)=1,\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

在$[0,1]$上可积.

证明 由黎曼函数的性质, $\forall\varepsilon>0$,在$[0,1]$上使得$R(x)>\dfrac{\varepsilon}{2}$的点至多有有限个,不妨设是$k$个,记为$0=p_1'<p_2'<\cdots<p_k'=1$.

作$[0,1]$的分割T:$0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{2k-1}=1$,使其满足

$$p_1'\in[x_0,x_1],x_1-x_0<\frac{\varepsilon}{2k},$$

$$p_2'\in[x_2,x_3],x_3-x_2<\frac{\varepsilon}{2k},$$

$$\vdots$$

$$p_k'\in[x_{2k-2},x_{2k-1}],x_{2k-1}-x_{2k-2}<\frac{\varepsilon}{2k}.$$

由于
$$\sum_{i=1}^{2k-1}\omega_i\Delta x_i=\sum_{j=0}^{k-1}\omega_{2j+1}\Delta x_{2j+1}+\sum_{j=1}^{k-1}\omega_{2j}\Delta x_{2j},$$

而在上式右边第一个和式中,有$\Delta x_{2j+1}<\dfrac{\varepsilon}{2k}$且$\omega_{2j+1}\leqslant 1$;在第二个和式中,有$\omega_{2j}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$且$\sum\limits_{j=1}^{k-1}\Delta x_{2j}\leqslant 1$,所以有

$$\sum_{i=1}^{2k-1}\omega_i\Delta x_i<k\cdot\frac{\varepsilon}{2k}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

由第二充要条件,黎曼函数在$[0,1]$上可积.

例 4.22 证明第三充要条件.

证明 ($\Rightarrow$)由f在$[a,b]$上可积知, $\forall\varepsilon\eta>0$, $\exists\delta>0$, $\forall T$, 满足$\|T\|<\delta$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\eta.$$

设$\omega_{k'}\geqslant\eta$, 则有

$$\eta\sum_{k'}\Delta x_{k'}\leqslant\sum_{k'}\omega_{k'}\Delta x_{k'}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon\eta,$$

即

$$\sum_{k'}\Delta x_{k'}<\varepsilon.$$

($\Leftarrow$)设$f(x)$在$[a,b]$上的振幅为ω.将对应于分割T的小区间分成两类:当$\omega_k\geqslant\eta$时,记$\omega_k=\omega_{k'}$, 相应地小区间的长度记为$\Delta x_{k'}$;而当$\omega_k<\eta$时,记$\omega_k=$

$\omega_{k''}$，相应地小区间的长度记为 $\Delta x_{k''}$.

已知，$\forall \varepsilon > 0, \eta > 0$（取 $\eta \leqslant \varepsilon$），$\exists \delta > 0, \forall T$，满足 $\| T \| < \delta$，而 $\omega_{k'} \geqslant \eta$ 的小区间长度 $\Delta x_{k'}$ 之和 $\sum\limits_{k'} \Delta x_{k'} < \varepsilon$. 于是有

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k &= \sum_{k'} \omega_{k'} \Delta x_{k'} + \sum_{k''} \omega_{k''} \Delta x_{k''} \\ &< \omega \sum_{k'} \Delta x_{k'} + \eta \sum_{k''} \Delta x_{k''} \\ &< \omega\varepsilon + \eta(b-a) < (\omega + b - a)\varepsilon.\end{aligned}$$

由第二充要条件，f 在 $[a,b]$ 上可积.

例 4.23　设 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 也在 $[a,b]$ 上可积.

证明　由 f 在 $[a,b]$ 上可积知，$\forall \varepsilon > 0, \exists T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

因为 f 可积，所以 f 在 $[a,b]$ 上有界，设 $|f(x)| \leqslant M$. $\forall x', x'' \in \Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$，由拉格朗日中值定理，有

$$|\mathrm{e}^{f(x')} - \mathrm{e}^{f(x'')}| = \mathrm{e}^{\xi} |f(x') - f(x'')| \leqslant \mathrm{e}^{M} |f(x') - f(x'')|,$$

其中 ξ 介于 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 之间.

用 $\overline{\omega}_i$ 表示 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 Δ_i 上的振幅，则对上式两边取上确界有

$$\overline{\omega}_i \leqslant \mathrm{e}^{M} \omega_i (i = 1, 2, \cdots, n). \qquad (*)$$

由此推出

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\omega}_i \Delta x_i \leqslant \mathrm{e}^{M} \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \mathrm{e}^{M} \varepsilon,$$

这表明 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上可积.

注 4.6　从本例的证明过程可以看出，在用第二充要条件证明函数的可积性时，只要能证明类似于式（$*$）的不等式成立，即欲证可积函数的振幅能被已知可积函数的振幅所控制，余下的只是例行公事而已！

例 4.24　设 $y = f(u)$ 在 $[A,B]$ 上连续，$u = \varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 当 $x \in [a,b]$ 时，$A \leqslant \varphi(x) \leqslant B$. 证明：$F(x) = f(\varphi(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

证明　由于 $f(u)$ 在 $[A,B]$ 上连续，所以它在 $[A,B]$ 上一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $u', u'' \in [A,B]$，$|u' - u''| < \delta$ 时，有

$$|f(u') - f(u'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

因此作 $[a,b]$ 的分割之后，在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上，若 $\varphi(x)$ 的振幅 $\omega_i^{\varphi} < \delta$，则 $F(x) = f(\varphi(x))$ 的振幅 $\omega_i^{F} < \varepsilon$.

事实上，$\forall x',x'' \in [x_{i-1},x_i]$，只要

$$|u' - u''| = |\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant \omega_i^{\varphi} < \delta,$$

必有

$$|F(x') - F(x'')| = |f(u') - f(u'')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\omega_i^F = \sup_{x',x'' \in [x_{i-1},x_i]} |F(x') - F(x'')| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由此知，在 $[x_{i-1},x_i]$ 上，若 $\omega_i^F \geqslant \varepsilon$，必有 $\omega_i^{\varphi} \geqslant \delta$. 故

$$\sum_{\omega_i^F \geqslant \varepsilon} \Delta x_i \leqslant \sum_{\omega_i^{\varphi} \geqslant \delta} \Delta x_i. \tag{2}$$

这样，$\forall \varepsilon > 0, \sigma > 0$，先找 $\delta > 0$ 使式(1)成立. 再由 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的可积性，利用第三充要条件的必要性对上述的 $\delta > 0$ 和 $\sigma > 0$，$\exists$ 分割 T，使得

$$\sum_{\omega_i^{\varphi} \geqslant \delta} \Delta x_i < \sigma.$$

于是由式(2)知

$$\sum_{\omega_i^F \geqslant \varepsilon} \Delta x_i \leqslant \sum_{\omega_i^{\varphi} \geqslant \delta} \Delta x_i < \sigma.$$

最后由第三充要条件的充分性即知，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

注 4.7 若外层函数 $y = f(u)$ 和内层函数 $u = \varphi(x)$ 都可积，它们的复合函数 $F(x) = f(\varphi(x))$ 却不一定可积. 例如，函数

$$y = f(u) = \begin{cases} 1, & \text{当 } u \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } u = 0 \text{ 时} \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上可积，而黎曼函数

$$u = \varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, & x = \dfrac{q}{p}, (p,q) = 1, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上也可积(见例 4.21)，但它们的复合函数

$$F(x) = f(\varphi(x)) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}, \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时} \end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上却不可积.

例 4.25 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，求证：

(1) $\forall \varepsilon > 0$，则存在区间 $[c,d] \subset [a,b]$，使得 $f(x)$ 在 $[c,d]$ 上的振幅 $\omega_f < \varepsilon$；

(2) $f(x)$ 的连续点在 $[a,b]$ 上处处稠密(即 $\forall [\alpha,\beta] \subset [a,b]$，$f(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内有连续点)；

(3)若$f(x)\geqslant 0$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$的充要条件是$f(x)$在连续点恒取零值.

(北师大).

证明　(1)用反证法.若$\exists\varepsilon_0>0$,使得$\forall[c,d]\subset[a,b]$,都有$\omega_f\geqslant\varepsilon_0$,那么对$[a,b]$的任一分割$T$,必有$\sum\limits_i\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0(b-a)$,这与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾.

(2)只要证明$f(x)$在$[a,b]$内至少有一个连续点即可.事实上,若能如此,则$\forall[\alpha,\beta]$,因为$f(x)$在$[\alpha,\beta]$上可积,故$f(x)$在$[\alpha,\beta]$内有连续点,这就证明$f(x)$的连续点在$[a,b]$中处处稠密.

为此,下面用区间套定理来证明.

$\forall\varepsilon>0$,由(1)知,存在$[a,b]$的闭子区间$I_1=[a_1,b_1]$,使得f在I_1上的振幅$\omega_f^{I_1}<\varepsilon$.将$I_1$适当缩小,使其满足$b_1-a_1\leqslant\dfrac{b-a}{2}$.将缩小后的区间仍记为$I_1=[a_1,b_1]$,在$I_1$上显然仍有$\omega_f^{I_1}<\varepsilon$;对$I_1$,重复上述做法,可得到它的闭子区间$I_2=[a_2,b_2]$,满足:$\omega_f^{I_2}<\dfrac{\varepsilon}{2}$且$b_2-a_2\leqslant\dfrac{b-a}{2^2}$;如此下去,可得到一个闭区间列$\{I_n\}$,满足:①在$I_n$上$f$的振幅$\omega_f^{I_n}<\dfrac{\varepsilon}{n}$;②$I_{n+1}\subset I_n$;③$b_n-a_n\leqslant\dfrac{b-a}{2^n}$.由闭区间套定理,$\exists\xi\in I_n\subset[a,b](n=1,2,\cdots)$.

下证:ξ是f的连续点.

若不然,则$\exists\varepsilon_0>0$在点ξ的任何邻域$U(\xi)$内都有点x',使$|f(x')-f(\xi)|\geqslant\varepsilon_0$.由此可知,$f$在$U(\xi)$上的振幅$\omega_f^U\geqslant|f(x')-f(\xi)|\geqslant\varepsilon_0$.而另一方面,对给定的邻域$U(\xi)$,存在$I_n\supset U(\xi)$,这与$I_n$的造法矛盾.

(3)($\Leftarrow$).由(2)知,f的连续点在$[a,b]$中稠密,因此,当f在连续点处恒取零值时,有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=$(下积分)$\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$.

($\Rightarrow$).若存在f的连续点$x_0\in[a,b]$(不妨设x_0为内点),使$f(x_0)>0$.由于f在点x_0的连续性,$\exists\delta>0$,当$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,有$f(x)>\dfrac{f(x_0)}{2}>0$,从而有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 2\delta\cdot\dfrac{f(x_0)}{2}=\delta f(x_0)>0$,这与$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$的假设矛盾(若$x_0$为区间的端点,只需将上面的不等式的积分区间改成$x_0$的单侧邻域即可).

例 4.26　(推广的牛顿-莱布尼茨公式)设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$F(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内除有限个点外,都有$F'(x)=f(x)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

证明 作 $[a,b]$ 的分割 $T: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, 让不满足 $F'(x) = f(x)$ 的点都是 T 的分点,则有

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \end{aligned}$$

其中 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. 上式右端是属于分割 T 的一个积分和,由 f 的可积性,令 $\|T\| \to 0$, 则右端的极限为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,而左边与 T 无关,故知结论成立.

本例还可进一步推广为下面的

例 4.27 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个跳跃间断点,除有限个内点 $C_1 < C_2 < \cdots < C_m$ 及端点 a,b 外,在 $[a,b]$ 上的其他点都有 $F'(x) = f(x)$ (称 F 是 f 的广义原函数). 证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{m} [F(C_i+0) - F(C_i-0)].$$

当 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续时,显然上式的最后一项变为 0,而 $F(b-0) = F(b), F(a+0) = F(a)$, 这便是例 4.26 的结论.

证明 记 $a = C_0, b = C_{m+1}$. 对 $F(x)$ 作连续性延拓,令

$$\overline{F}(x) = \begin{cases} F(C_i+0), & x = C_i, \\ F(x), & x \in (C_i, C_{i+1}), \quad i = 0,1,\cdots,m. \\ F(C_{i+1}-0), & x = C_{i+1}, \end{cases}$$

由推广的牛顿-莱布尼茨公式知

$$\int_{C_i}^{C_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \overline{F}(x)\Big|_{C_i}^{C_{i+1}} = \overline{F}(C_{i+1}) - \overline{F}(C_i) = F(C_{i+1}-0) - F(C_i+0).$$

故

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{m} \int_{C_i}^{C_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{m} [F(C_{i+1}-0) - F(C_i+0)] \\ &= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{m} [F(C_i+0) - F(C_i-0)]. \end{aligned}$$

注 4.8 1. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数吗?

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在原函数,问: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积吗?

可积与原函数存在,是两个不同的概念,一般来说,两者没有必然的联系! 这一点必须予以澄清. 下面我们来举例说明这两个问题的答案都是否定的.

对1,取$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}x\in[-1,1]$. 因为$f(x)$在$[-1,1]$上是只有一个第一类间断点的有界函数,所以$f(x)$在$[-1,1]$上可积,若在$[-1,1]$上存在$F(x)$,使得$F'(x)=f(x)$,则$F'(x)$在$[-1,1]$上有第一类间断点$x=0$. 这与导数极限定理相矛盾,因此$f(x)$在$[-1,1]$上不存在原函数.

对2,取$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}x\in[-1,1]$. 显然,$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}x\in[-1,1]$满足$F'(x)=f(x)$,即$F(x)$是$f(x)$在$[-1,1]$上的一个原函数.

若令$x_k=\dfrac{1}{\sqrt{2k\pi}},k\in\mathbf{N}_+$,则$f(x_k)=-2\sqrt{2k\pi}\to\infty\ (k\to\infty)$,这表明$f(x)$在$[-1,1]$上无界. 由可积的必要条件,$f(x)$在$[-1,1]$上不可积.

四、定积分的性质及其应用

定积分的性质很多,大致可分为四类:第一类,积分的线性性;第二类,积分区间的可加性;第三类,积分的单调性;第四类,积分的中值性. 对于第一积分中值定理,同学们比较熟悉,不再赘述,下面将第二积分中值定理笔之于后,至于它的证明可参看相关《数学分析》教材.

第二积分中值定理

(1)若函数$f(x)$在$[a,b]$上单调减少、非负,函数$g(x)$在$[a,b]$上可积,则$\exists\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x.$$

(2)若函数$f(x)$在$[a,b]$上单调增加、非负,函数$g(x)$在$[a,b]$上可积,则$\exists\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

(3)若函数$f(x)$在$[a,b]$上单调,函数$g(x)$在$[a,b]$上可积,则$\exists\xi\in[a,b]$,使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x+f(b)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.$$

例4.28　设$F_0(x)=\ln x,F_{n+1}(x)=\int_0^x F_n(t)\mathrm{d}t,n=0,1,2,\cdots,x>0$. 求极限

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!F_n(1)}{\ln n}$.

解

$$F_0(x)=\ln x,$$

$$F_1(x)=\int_0^x F_0(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{1!}(\ln x-1)x,$$

$$\begin{aligned}F_2(x)&=\int_0^x F_1(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x(\ln t-1)t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\int_0^x(\ln t-1)\,\mathrm{d}(t^2)\\&=\frac{1}{2}\left[(\ln t-1)t^2\Big|_0^x-\int_0^x t\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{2!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)x^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_3(x)&=\int_0^x F_2(t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2!}\int_0^x\left(\ln t-1-\frac{1}{2}\right)t^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3!}\int_0^x\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}(t^3)\\&=\frac{1}{3!}\left[\left(\ln x-1-\frac{1}{2}\right)t^3\Big|_0^x-\int_0^x t^2\,\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{3!}\left(\ln x-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^3.\end{aligned}$$

用数学归纳法,不难证明:

$$F_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\ln x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right)x^n.$$

于是,由施图兹定理可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n!F_n(1)}{\ln n}&=-\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}}{\ln n}\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=-1.\end{aligned}$$

例 4.29　证明：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0.$

证明　令 $t = x^2$，则 $x = \sqrt{t}, \mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t}}$，

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t\right).$$

对上式右端第二个积分，作变换 $t = \pi + u$，则有

$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}\mathrm{d}u.$$

故

$$\text{原式} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t+\pi}}\right)\sin t\mathrm{d}t > 0.$$

这里注意到了在 $(0,\pi]$ 上，$\sin t > 0$.

类题 1　不计算积分，判断下列积分的符号.

(1) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_{-2}^{2} x^3 \cdot 2^x \mathrm{d}x$.

类题 2　选择题：设 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\mathrm{d}t$，则 $F(x)$ 的值(　　).

(A)为正常数；　　(B)为负常数；

(C)恒为零；　　(D)不为常数.

(数学Ⅱ)

例 4.30　设 $f(x), g(x)$ 是 $[a,b]$ 上的正值连续函数，求证：

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b [f(x)]^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

(复旦大学).

证明　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值为 M，且在点 ξ 取到，即 $f(\xi) = M$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，使 $\forall x \in [\xi-\delta, \xi+\delta] \cap [a,b] = [\alpha,\beta]$ 有

$$f(\xi) - \varepsilon < f(x) \leqslant f(\xi).$$

两边 n 次方，并乘以 $g(x)$ 有

$$[f(\xi)-\varepsilon]^n g(x) < [f(x)]^n g(x) \leqslant [f(\xi)]^n g(x).$$

在 $[\alpha,\beta]$ 上积分，再开 n 次方，有

$$(f(\xi)-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_\alpha^\beta [f(x)]^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant f(\xi)\left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

进而，有

$$(f(\xi)-\varepsilon)\left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\int_a^b [f(x)]^n g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant f(\xi)\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_\alpha^\beta g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = 1$，可得

$$f(\xi)-\varepsilon \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b [f(x)]^n g(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant f(\xi).$$

由 $\varepsilon>0$ 的任意性,可知结论成立.

这个例题有如下的变形.

类题 1 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)\geqslant 0$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b [f(x)]^n \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

提示 设 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. 分 $M\equiv 0$ 和 $M>0$ 两种情况讨论.

类题 2 设 f,g 是 $[a,b]$ 上的连续函数,且 $f(x)>0, g(x)\geqslant 0$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

提示 设 $0<m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)\leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)=M$,则有

$$\sqrt[n]{m}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\sqrt[n]{f(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt[n]{M}\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

由此易知,原极限 $=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

类题 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)=1$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{(f(x))^n}\right]^{\frac{1}{n}} = 1\text{(浙大)}.$$

提示 这是例 4.30 的特殊情形. 在例 4.30 中取 $g(x)\equiv 1$,$f(x)$ 用 $\dfrac{1}{f(x)}$ 替代.

类题 4 设 $f(x)$ 是 $[\alpha,\alpha+1]$ 上的连续正值函数,记 $M=\max\limits_{x\in[\alpha,\alpha+1]} f(x)$. 证明:$A_n=\sqrt[n]{\int_\alpha^{\alpha+1}[f(x)]^n\mathrm{d}x}$ 关于 n 单调递增,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_\alpha^{\alpha+1}[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M$(浙大).

提示 只证明 $\{A_n\}$ 关于 n 单调递增.

取 $p=\dfrac{n+1}{n}$,$q=n+1$,显然 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 由 Hölder 不等式,有

$$A_n^n=\int_\alpha^{\alpha+1}[f(x)]^n\mathrm{d}x \leqslant \left(\int_\alpha^{\alpha+1}[f(x)]^{np}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^{\alpha+1}1^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sqrt[n+1]{[f(x)]^{n+1}\mathrm{d}x}\right)^n = A_{n+1}^n,$$

即 $\{A_n\}$ 关于 n 单调递增.

例 4.31 若函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上取正值且连续,记

$$D_n=\int_a^b [f(x)]^n g(x)\,\mathrm{d}x,$$

则数列 $\left\{\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$ 收敛,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{n+1}}{D_n}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

证明　这里我们将用到如下

命题　设 $\{a_n\}$ 是正数列,则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

其详细证明可参见参考文献[2].

设 $\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)=M,\forall n\in\mathbf{N}_+$,

$$D_{n+1}=\int_a^b[f(x)]^{n+1}g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b[f(x)]^ng(x)\mathrm{d}x=MD_n,$$

即 $\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\leqslant M$, 这表明数列 $\left\{\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$有上界.

由柯西-施瓦茨不等式,有

$$\begin{aligned}D_{n+1}^2&=\left(\int_a^b[f(x)]^{n+1}g(x)\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\int_a^b[f(x)]^{\frac{n+2}{2}}[g(x)]^{\frac12}\cdot[f(x)]^{\frac n2}[g(x)]^{\frac12}\mathrm{d}x\right)^2\\&\leqslant\int_a^b[f(x)]^{n+2}g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b[f(x)]^ng(x)\mathrm{d}x=D_{n+2}\cdot D_n.\end{aligned}$$

即 $\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\leqslant\dfrac{D_{n+2}}{D_{n+1}}$, 这表明数列 $\left\{\dfrac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$ 单调增加.

由单调有界定理, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{D_{n+1}}{D_n}$ 存在,再由命题及上例的结果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{D_{n+1}}{D_n}=\lim_{n\to\infty}D_n^{\frac1n}=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

例 4.32　设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,证明:

$$\lim_{h\to0^+}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x=\pi f(0)\quad(\text{中科院}).$$

证明　直接对 $\int_{-1}^1\dfrac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x$ 进行计算是不容易的,因此可考虑用第一积分中值定理将 $f(x)$ 提到积分号外边.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{-\sqrt h}+\int_{-\sqrt h}^{\sqrt h}+\int_{\sqrt h}^1\\&=f(\xi_1)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-1}^{-\sqrt h}+f(\xi_2)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{-\sqrt h}^{\sqrt h}+f(\xi_3)\arctan\frac{x}{h}\Big|_{\sqrt h}^1\\&\xlongequal{\Delta}I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in [-1, -\sqrt{h}], \xi_2 \in [-\sqrt{h}, \sqrt{h}], \xi_3 \in [\sqrt{h}, 1], h > 0$ 适当小.

由于 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续,所以 $f(x)$ 有界,设 $|f(x)| \leqslant M$. 于是有

$$|I_1| \leqslant M\left|\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right| \to M\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \ (h \to 0^+),$$

$$|I_3| \leqslant M\left|\arctan\frac{1}{h} - \arctan\frac{1}{\sqrt{h}}\right| \to 0 \ (h \to 0^+),$$

$$I_2 = 2\lim_{h\to 0^+} f(\xi_2)\arctan\frac{1}{\sqrt{h}} = 2f(0) \cdot \frac{\pi}{2} = \pi f(0).$$

综上有

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1} \frac{h}{h^2 + x^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

本例是“核”积分的极限问题(积分核为“ $\frac{h}{h^2 + x^2}$ ”),下例也属于这类问题. 但由于 $f(x)$ 的条件较弱,不能应用第一积分中值定理,因此,我们将给出另外一种作法,这两种作法均是处理“核”积分极限问题的有效方法.

例 4.33 设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积,且在点 $x = 0$ 处连续. 设

$$\Phi_n(x) = \begin{cases} (1-x)^n, & x \in [0,1], \\ \mathrm{e}^{nx}, & x \in [-1,0]. \end{cases}$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2}\int_{-1}^{1} f(x)\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$ (浙大).

证明 因为 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上可积,所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有界,设界为 M,即 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [-1,1]$.

又因为 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续,所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时,有

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

通过计算易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{n}{2}\Phi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$, 因此,欲证结论成立,只需证

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{n}{2}\Phi_n(x)(f(x) - f(0))\,\mathrm{d}x = 0.$$

为此,将积分分为三段进行估计:

$$\int_{-1}^{1} \frac{n}{2}\Phi_n(x)(f(x) - f(0))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{1} \overset{\Delta}{=\!=} I_1 + I_2 + I_3,$$

而

$$|I_1| \leqslant 2M\int_{-1}^{-\delta} \frac{n}{2}\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x = M(\mathrm{e}^{-n\delta} - \mathrm{e}^{-n}) \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$|I_3| \leqslant 2M\int_{\delta}^{1} \frac{n}{2}(1-x)^n\mathrm{d}x = \frac{nM}{(n+1)}(1-\delta)^{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leqslant \varepsilon\int_{-\delta}^{\delta}\frac{n}{2}\Phi_n(x)\mathrm{d}x\\
&= \varepsilon\left[\int_{-\delta}^{0}\frac{n}{2}\mathrm{e}^{nx}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\delta}\frac{n}{2}(1-x)^n\mathrm{d}x\right]\\
&= \varepsilon\left[\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-n\delta}) - \frac{n}{2(n+1)}((1-\delta)^{n+1}-1)\right]\to\varepsilon \quad (n\to\infty).
\end{aligned}
$$

综上可知,原结论成立.

类题 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并是在 $x=b$ 处连续,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n f(x)\mathrm{d}x = f(b)\text{(浙大)}.$$

提示　因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,所以存在 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in[a,b]$.

又由 $f(x)$ 在 $x=b$ 处连续可知,$\forall\varepsilon>0,\exists 0<\delta<\frac{1}{2}(b-a)$,当 $x\in(b-\delta,b)$ 时,有

$$|f(x)-f(b)|<\varepsilon.$$

注意到

$$\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n f(b)\mathrm{d}x = f(b).$$

我们有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n f(x)\mathrm{d}x - f(b)\right|\\
=&\left|\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\int_a^b(x-a)^n(f(x)-f(b))\mathrm{d}x\right|\\
\leqslant&\frac{n+1}{(b-a)^{n+1}}\left[\int_a^{b-\delta}(x-a)^n|f(x)-f(b)|\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^{b}(x-a)^n|f(x)-f(b)|\mathrm{d}x\right]\\
\leqslant&2M\left(\frac{b-a-\delta}{b-a}\right)^{n+1} + \left(\frac{\delta}{b-a}\right)^{n+1}\varepsilon\to 0(n\to\infty).
\end{aligned}
$$

类题 2　设 $f(x)\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$,$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\varepsilon}f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. 试证明:对每一个有界连续函数 $\varphi(x)$,有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)$(华南理工).

提示　由已知条件,存在 $M>0$,使得 $|\varphi(x)|\leqslant M,\forall x\in(-\infty,+\infty)$ 及 $\int_{-\infty}^{+\infty}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=1$. 再由 $\varphi(x)$ 的连续性,对 $\forall\sigma>0,\exists\delta>0$,当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时,有 $|\varphi(x)-\varphi(0)|<\sigma$. 于是,有

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x-\varphi(0)\right|$$

$$=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}f_\varepsilon(x)(\varphi(x)-\varphi(0))\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant 2M\int_{-\infty}^{-\delta}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x+\int_{-\delta}^{\delta}f_\varepsilon(x)\mid\varphi(x)-\varphi(0)\mid\mathrm{d}x+2M\int_{\delta}^{+\infty}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x$$

$$\triangleq I_1+I_2+I_3.$$

注意到,$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,我们有 $I_1=2M\int_{-\infty}^{-\frac{\delta}{\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x\to 0\quad(\varepsilon\to 0^+)$.

同理 $I_3\to 0(\varepsilon\to 0^+)$. 而 $I_2\leqslant\sigma\int_{-\delta}^{\delta}f_\varepsilon(x)\mathrm{d}x=\sigma\int_{-\frac{\delta}{\varepsilon}}^{\frac{\delta}{\varepsilon}}f(x)\mathrm{d}x\to\sigma\quad(\varepsilon\to 0^+)$.

由 σ 的任意性,可知结论成立.

例 4.34 (黎曼引理)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,证明

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\begin{matrix}\sin\lambda x\\ \cos\lambda x\end{matrix}\mathrm{d}x=0.$$

证明 对任意的有限区间 $[\alpha,\beta]$,有

$$\left|\int_\alpha^\beta\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\cos\lambda\alpha-\cos\lambda\beta}{\lambda}\right|\leqslant\frac{2}{\lambda}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,所以它有界,设 $|f(x)|\leqslant A$. $\forall\varepsilon>0$,由 f 在 $[a,b]$ 上的可积性知,存在 $[a,b]$ 的分割 $T:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,使得

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是,当 $\lambda>\frac{4nA}{\varepsilon}$ 时,有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x_i)+f(x)-f(x_i)]\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)|\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin\lambda x\mathrm{d}x\right|+\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)-f(x_i)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{2nA}{\lambda}+\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

故

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin\lambda x\mathrm{d}x=0.$$

同理可证另一个等式.

利用黎曼引理可十分简便地求出下面的极限,请同学们试之.

(1) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_0^a \dfrac{\cos^2\lambda x}{1+x}\mathrm{d}x(a>0)$　$\left(\text{答案:}\dfrac{1}{2}\ln(1+a)\right)$;

(2) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2\lambda x\mathrm{d}x$　(答案:π).

黎曼引理有下面的一般形式.

推广的黎曼引理　设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$g(x)$是以T为周期的周期函数,且在$[0,T]$上可积,则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)g(\lambda x)\mathrm{d}x=\frac{1}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由于证明比较复杂,在此我们省略.

类题1　设$S(x)=4[x]-2[2x]+1$,$f(x)$在$[0,1]$上可积,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)S(nx)\mathrm{d}x=0(\text{兰大}).$$

证明　易知$S(x)$是以1为周期的函数,且当$x\in[0,1]$时,

$$S(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right),\\ -1, & x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right),\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

显然$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0$,由推广的黎曼引理知

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)S(nx)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0.$$

类题2　设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续,求证

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)\,|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x(\text{清华}).$$

取$g(x)=|\sin x|$,它是以π为周期的函数,且$\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x=2$. 由推广的黎曼引理可知,结论成立.

下面我们不用推广的黎曼引理,直接证明.

证明　$|\sin nx|$以$\dfrac{\pi}{n}$为周期.将$[0,\pi]$$n$等分,即

$$T:0=x_0<x_1<\cdots<x_n=\pi,x_i=\frac{i}{n}\pi,i=0,1,2,\cdots,n.$$

记$M_i=\sup\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$,$m_i=\inf\limits_{x\in[x_{i-1},x_i]}f(x)$,则

$$\int_0^{\pi} f(x)\,|\sin nx|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{\frac{i-1}{n}\pi}^{\frac{i}{n}\pi} f(x)\,|\sin nx|\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \int_{\frac{i-1}{n}\pi}^{\frac{i}{n}\pi} |\sin nx| \mathrm{d}x \quad (C_i \in [m_i, M_i])$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin nx \mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot \frac{\pi}{n} \to \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{d}x \ (n \to \infty),$$

这里利用第一积分中值定理,并注意到了 $f(x)$ 的可积性.

例 4.35 证明定积分的连续性:设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x) = f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则有

$$\lim_{h \to 0} \int_a^b |f_h(x) - f(x)| \mathrm{d}x = 0.$$

证明 $\forall \varepsilon > 0$,取 $\delta = \dfrac{b-a}{N}$, $N \in \mathbf{N}_+$. 取 $n > N$,作 $[a,b]$ 的 n 等分,其分点为 $x_k = a + \dfrac{k}{n}(b-a)$, $k = 0,1,\cdots,n$. 由 f 的可积性,有 $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon$.

当 $0 < h < \delta$ 时, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$,有

$$\sup |f(x+h) - f(x)| \leqslant \omega_k + \omega_{k+1}.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x+h) - f(x)| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (\omega_k + \omega_{k+1}) \Delta x_k < 2\varepsilon.$$

当 $-\delta < h < 0$ 时,可类似地证明.

例 4.36 证明:当 $m < 2$ 时,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^m} \int_0^x \sin \frac{1}{t} \mathrm{d}t = 0.$$

证明 当 $m \leqslant 0$ 时,结论显然成立.

当 $m > 0$ 时,这是一个 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式. 使用洛必达法则,可证当 $m < 1$ 时,结论成立,但当 $1 \leqslant m < 2$ 时,洛必达法则失效.

下面用第二积分中值定理来证明.

令 $\dfrac{1}{t} = u$, 则

$$\frac{1}{x^m} \int_0^x \sin \frac{1}{t} \mathrm{d}t = \frac{1}{x^m} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{\sin u}{u^2} \mathrm{d}u.$$

因为 $\dfrac{1}{u^2}$ 为非负递减函数, $\forall A > \dfrac{1}{x}$, 由第二积分中值定理,有

$$\int_{\frac{1}{x}}^{A}\sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=x^2\int_{\frac{1}{x}}^{\xi}\sin u\mathrm{d}u,\qquad \xi\in\left(\frac{1}{x},A\right),$$

$$=x^2\left(\cos\frac{1}{x}-\cos\xi\right).$$

所以

$$\frac{1}{x^m}\left|\int_{\frac{1}{x}}^{A}\sin u\,\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right|\leqslant 2x^{2-m},\quad A>\frac{1}{x}.$$

当 $m<2$ 时,由 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{2-m}=0$ 知,原结论成立.

例 4.37　证明

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty)\text{(北师大)}.$$

证明　分部积分,有

$$\int_0^1\frac{x^{n-1}}{1+x}\mathrm{d}x=\frac{x^n}{n}\cdot\frac{1}{1+x}\bigg|_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1\frac{x^n}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{(1+x)^2}\bigg|_0^1+\frac{2}{n(n+1)}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n(n+1)}+\frac{2}{n(n+1)}\cdot\frac{1}{(1+\xi)^3}\int_0^1x^{n+1}\mathrm{d}x,\xi\in[0,1],$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{4n(n+1)}-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{4n^2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty).$$

类题 1　设 $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,求证:

$$\int_0^1x^nf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{f(1)}{n}-\frac{f(1)+f'(1)}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\quad(n\to\infty).$$

类题 2　求证:

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=1-\frac{\ln 2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to\infty).$$

提示

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}=1-\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}\mathrm{d}x$$

$$=1-\frac{1}{n}\int_0^1x\mathrm{d}[\ln(1+x^n)]$$

$$=1-\frac{x\ln(1+x^n)}{n}\bigg|_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1\ln(1+x^n)\mathrm{d}x$$

$$= 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x.$$

余下的只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \ln(1 + x^n)\,\mathrm{d}x = 0$ 即可,请同学们自行完成.

五、广义积分

在这一段中将涉及广义积分的计算、敛散性的判定以及广义积分作为“积分和”的极限等内容.

收敛的广义积分继承了定积分的许多性质. 如,线性性质、区间的可加性、分部积分法、变量替换等. 但也有一些性质,如乘积可积性,却不再成立(请同学们举例说明这一点).

广义积分计算常用的方法有①牛顿-莱布尼茨公式法;②分部积分法;③变量替换法. 在使用这些方法时,计算奇点(可以是有限点,也可以是 $\pm\infty$)处的值要把它理解为极限过程.

判定广义积分敛散性的方法有①定义;②柯西准则;③非负函数的比较判别法;④非负函数的阶方法;⑤阿贝尔判别法(简称 A-法);⑥狄里克雷判别法(简称 D-法);⑦级数法等.

常见的广义积分的敛散性.

1) $\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a > 0)$,当 $p > 1$ 时,收敛;当 $p \leqslant 1$ 时,发散.

2) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a > 0)$,当 $p < 1$ 时,收敛;当 $p \geqslant 1$ 时,发散.

在用阶方法判定广义积分的敛散性时,常用下面的关系式:$\forall \varepsilon > 0$ 充分小,当 $x \to +\infty$ 时,$\ln(1 + x) = O(x^{\varepsilon})$;当 $x \to 0^+$ 时,$\ln x = O\left(\frac{1}{x^{\varepsilon}}\right)$.

例 4.38 计算下列广义积分

(1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$ (数学Ⅳ);

(2) $J = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^4}$;

(3) $K = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$,其中 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解 (1) $I = \int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x}}{(1 + \mathrm{e}^{x})^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{d}\left(-\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{x}}\right)$

$$= -\frac{x}{1 + \mathrm{e}^{x}}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \mathrm{e}^{x}}$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = -\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

(2)令 $x = \frac{1}{t}$,则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$,

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}dt = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

于是有

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}$$

$$\xlongequal{令\, u = x-\frac{1}{x}} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(3)先求 $\int \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx$.

由分部积分公式,可得

$$\int \frac{e^{-x^2}}{\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2}dx = -\int e^{-x^2}\cdot\frac{1}{2x}d\left(\frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}\right)$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} + \int \frac{1}{x^2+\frac{1}{2}}d\left(\frac{e^{-x^2}}{2x}\right)$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} - \int \frac{e^{-x^2}}{x^2}dx$$

$$= -\frac{e^{-x^2}}{2x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)} + \int e^{-x^2}d\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{2xe^{-x^2}}{2x^2+1} + 2\int e^{-x^2}dx,$$

所以

$$K = \frac{2x\mathrm{e}^{-x^2}}{2x^2+1}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

类题 计算

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\alpha})} \quad (\alpha \geqslant 0).$$

提示 令 $x = \frac{1}{t}$.

例 4.39 证明:欧拉积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛,并求其值.

证明 $x = 0$ 为奇点. $\forall \varepsilon > 0$,当 $x \to 0^+$ 时,有

$$\ln\sin x = O((\sin x)^{-\varepsilon}) = O(x^{-\varepsilon}).$$

由此可知,欧拉积分收敛.

下面求 I 的值.

作变量替换 $x = 2t$,则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin 2t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\mathrm{d}t.$$

对后一个积分作变量替换 $t = \frac{\pi}{2} - u$,则

$$I = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t - 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I,$$

故

$$I = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

应用欧拉积分,不难求出下面的积分.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$;

提示 分部积分.

(2) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$;

提示 分部积分,$\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x = -\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$,再令 $x = \sin t$.

(3) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$.

提示　分部积分,原积分 $=\int_0^{\pi}x\mathrm{d}[\ln(1-\cos x)]$

$$=x\ln(1-\cos x)\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\ln 2-I.$$

而　$I=\int_0^{\pi}\ln(1-\cos x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\ln\left(2\sin^2\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

$=\pi\ln 2+2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$,再令 $t=\frac{x}{2}$.

例 4.40　计算 $I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x, m,n\in\mathbf{N}_+$ (北师大).

解　由分部积分公式有

$$I_{m,n}=\int_0^1(\ln x)^n\mathrm{d}\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$=\frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x=-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}.$$

于是有

$$I_{m,n}=-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}=(-1)^2\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{m,n-2}$$

$$=\cdots=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{m,0}.$$

而

$$I_{m,0}=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\frac{1}{m+1},$$

故

$$I_{m,n}=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

例 4.41　设 $f(x)=\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t$,求 $f'(0)$.

解　由导数的定义,有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

由分部积分公式,有

$$\frac{1}{x}\int_0^x \cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t = -\frac{1}{x}\int_0^x t^2\mathrm{d}\left(\sin\frac{1}{t}\right)$$

$$= -\frac{1}{x}\left(t^2\sin\frac{1}{t}\Big|_0^x - 2\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)$$

$$= -x\sin\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

对上式右端的第二项,使用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \lim_{x\to 0}2x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

从而

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\left(-x\sin\frac{1}{x} + \frac{2}{x}\int_0^x t\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right) = 0.$$

类题 证明广义积分 $I = \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛,且 $|I| \leqslant 1$(解放军信息工程大学).

提示 用 D-法易证广义积分 I 收敛.

因为

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{1+x}$$

$$= \frac{\sin x}{1+x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,$$

所以

$$|I| \leqslant \int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x}\Big|_0^{+\infty} = 1.$$

例 4.42 求 $x\to 1^-$ 时,与 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量(第一届全国大学生数学竞赛(非数学类)初赛试题).

解 本题就是要找 $x\to 1^-$ 时的无穷大量 $g(x)$,使得

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sum_{n=0}^{\infty}x^{n^2}}{g(x)} = 1.$$

$\forall\ 0 < \delta < \frac{1}{2}$,当 $x\in(1-\delta,1)$ 时,由第一积分中值定理,存在 $\xi\in[n,n+1]$($n = 0,1,\cdots$),使得

$$\int_n^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t = x^{\xi^2}.$$

因此,$\forall x\in(1-\delta,1)$,有 $x^{n^2} \geqslant \int_n^{n+1}x^{t^2}\mathrm{d}t$. 进而有

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}; \tag{1}$$

另一方面，由 $x^{(n+1)^2} \leqslant \int_n^{n+1} x^{t^2}\mathrm{d}t$，即 $x^{n^2} \leqslant \int_{n-1}^{n} x^{t^2}\mathrm{d}t$ 可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t. \tag{2}$$

由(1)、(2)两式可得

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \leqslant 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t, \forall x \in (1-\delta,1).$$

注意到

$$\int_0^{+\infty} x^{t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2\ln\frac{1}{x}}\mathrm{d}t = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} \to +\infty\ (x\to 1^-)\left(\text{其中作了变换 } u = t\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\right).$$

于是，取 $g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}$，则有

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}}{g(x)} = 1.$$

故 $g(x)$ 即为所求.

例 4.43　讨论积分

$$I = \int_0^1 x^{\alpha}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

的敛散性.

解　先讨论 $I_1 = \int_0^1 x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

令 $\frac{1}{x^2} = y$，即 $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$，则

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y^{-\frac{\alpha+3}{2}}\cos y\mathrm{d}y.$$

当 $\alpha > -3$ 时，$y^{-\frac{\alpha+3}{2}}$ 单调递减趋向于零. 又 $\forall A > 1$，有

$$\left|\int_1^A \cos y\mathrm{d}y\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2,$$

所以由 D-法知，当 $\alpha > -3$ 时，I_1 收敛；

当 $\alpha \leqslant -3$ 时，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\int_{2n\pi+\frac{\pi}{6}}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}} y^{-\frac{\alpha+3}{2}}\cos y\mathrm{d}y \geqslant \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos y\mathrm{d}y > \frac{\pi}{12}.$$

由柯西准则知，I_1 发散.

再由 $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的单调有界性，根据 A-法知，I 与 I_1 具有相同的敛散性.

例 4.44 讨论积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{x^{1-p}}{|x-1|^{p+q}}\mathrm{d}x,p,q\in\mathbf{R}$$

的敛散性.

解 $x=0,x=1$ 和 $x=+\infty$ 可能为奇点，

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}(1-x)^{p+q}}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{p-1}(x-1)^{p+q}}\overset{\Delta}{=\!=}I_1+I_2.$$

当 $x\to0^+$ 时，$\dfrac{1}{x^{p-1}(1-x)^{p+q}}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}$，

当 $x\to1^-$ 时，$\dfrac{1}{x^{p-1}(1-x)^{p+q}}\sim\dfrac{1}{(1-x)^{p+q}}$，

所以欲使 I_1 收敛，必须要求 $p-1<1$ 和 $p+q<1$.

又当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^{p-1}(x-1)^{p+q}}\sim\dfrac{1}{x^{2p+q-1}}$，所以欲使 I_2 收敛，必须要求 $p+q<1$ 和 $2p+q-1>1$.

综上可知，当 p,q 满足：

$$p<2\text{ 且 }2(1-p)<q<1-p$$

时，I 收敛.

例 4.45 积分 $I=\int_0^{+\infty}\left[\left(1-\dfrac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$ 是否收敛？是否绝对收敛？证明你的结论(北大).

解 $x=0$ 和 $x=+\infty$ 为奇点.

$$I=\int_0^1\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\left[\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1\right]\mathrm{d}x$$

$$\overset{\Delta}{=\!=}I_1-1+I_2.$$

对 I_1 而言，$x=0$ 为奇点. 由

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)(x\to0),$$

有

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left[\frac{x^2}{3!}+o(x^2)\right]^{-\frac{1}{3}}\sim(3!)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\quad(x\to0).$$

由此可见，I_1 收敛. 又因为被积函数非负，所以 I_1 还是绝对收敛.

对 I_2 而言，$x=+\infty$ 为奇点. 因为当 $x>1$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$，故由 $(1+x)^{\alpha}$ 的展开式，有

$$\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)^{-\frac{1}{3}}-1=\frac{1}{3}\frac{\sin x}{x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)(x\to+\infty).$$

于是

$$I_2=\frac{1}{3}\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}o\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x.$$

由 D-法知，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 条件收敛，而 $\int_1^{+\infty}o\left(\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，所以 I_2 条件收敛.

综上知，I 条件收敛.

例 4.46　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上有一阶连续导数，且 $f(0)>0$，$f'(x)\geqslant 0$，$\forall x\in[0,+\infty)$. 若 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x<+\infty$，证明：$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x<+\infty$（第四届全国大学生数学竞赛（数学类）预赛试题）.

证明　对 $\forall A>0$，由 $f'(x)\geqslant 0$，有

$$0\leqslant\int_0^A\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x-\int_0^A\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x=\int_0^A\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x.$$

对其取极限可得

$$\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{f'(x)}{f(x)(f(x)+f'(x))}\mathrm{d}x\leqslant\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{f'(x)}{f^2(x)}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)\Big|_0^A\leqslant\frac{1}{f(0)}.$$

由已知条件，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{f(x)+f'(x)}\mathrm{d}x+\frac{1}{f(0)}<+\infty.$$

例 4.47　设 α,β 为实数，试讨论积分

$$I=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\sin x^{\beta}\mathrm{d}x$$

的敛散性（中科院）.

解　若 $\beta=0$，则 $I=\sin 1\cdot\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{d}x$ 无处收敛；

若 $\beta\neq 0$，令 $t=x^{\beta}$，则 $x=t^{\frac{1}{\beta}}$，$\mathrm{d}x=\frac{1}{\beta}t^{\frac{1}{\beta}-1}\mathrm{d}t$，

$$I=\pm\int_0^{+\infty}\frac{1}{\beta}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\mathrm{d}t\quad(\beta>0\text{ 取“+”},\beta<0\text{ 取“-”})$$

$$=\frac{1}{|\beta|}\int_0^{+\infty}t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{|\beta|}\int_0^1 t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\mathrm{d}t + \frac{1}{|\beta|}\int_1^{+\infty} t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\Delta} I_1 + I_2.$$

对于 I_1 而言，$t = 0$ 可能为奇点. 当 $t \to 0^+$ 时，$t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t \sim t^{\frac{\alpha+1}{\beta}}$. 由此可见，当 $-\frac{\alpha+1}{\beta} < 1$ 即 $\frac{\alpha+1}{\beta} > -1$ 时，I_1 收敛. 因为被积函数非负，所以 I_1 还是绝对收敛.

对于 I_2 而言，$t = +\infty$ 为奇点，此时只考虑 $\frac{\alpha+1}{\beta} > -1$ 的情形.

当 $-1 < \frac{\alpha+1}{\beta} < 0$ 时，由 $|t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t| = \left|\frac{\sin t}{t^{1-\frac{\alpha+1}{\beta}}}\right| \leqslant \frac{1}{t^{1-\frac{\alpha+1}{\beta}}}$ 及 $1 - \frac{\alpha+1}{\beta} > 1$ 知，I_2 绝对收敛；

当 $0 \leqslant \frac{\alpha+1}{\beta} < 1$ 时，$t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}$ 单调递减趋向于零，且 $\forall A > 1$，有 $\left|\int_1^A \sin t\mathrm{d}t\right| \leqslant 2$. 由 D-法知，$I_2$ 收敛且为条件收敛；

当 $\frac{\alpha+1}{\beta} \geqslant 1$ 时，$\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\sin t\mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\mathrm{d}t = 1.$$

由柯西准则知，I_2 发散

综上知，当 $-1 < \frac{\alpha+1}{\beta} < 0$ 时，I 绝对收敛；当 $0 \leqslant \frac{\alpha+1}{\beta} < 1$ 时，I 条件收敛.

例 4.48 证明无穷积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛，其中 $[x^2]$ 表示不超过 x^2 的最大整数.

证明 当 $\sqrt{n} \leqslant x < \sqrt{n+1}$ 时，有 $[x^2] = n, n = 0,1,2,\cdots$. 而

$$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

这是一个交错级数，由莱布尼茨判别法，它收敛.

这个例子告诉我们，无穷积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ 收敛，并不要求被积函数 $f(x) = (-1)^{[x^2]} \to 0 (x \to +\infty)$.

例 4.49 证明：

(1)无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$ 发散;

(2)无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4\sin^2 x}$ 收敛.

证明　利用级数法.

(1)原积分 $= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$

$$\xlongequal{令\, x = n\pi + t} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t} \xlongequal{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

而

$$u_n = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t} > \int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t},$$

当 $0 < t < \frac{1}{(n+1)\pi}$ 时,有

$$(n\pi+t)^2\sin^2 t < (n+1)^2\pi^2 t^2 < (n+1)^2\pi^2 \cdot \frac{1}{(n+1)^2\pi^2} = 1.$$

故

$$u_n > \int_0^{\frac{1}{(n+1)\pi}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^2\sin^2 t} > \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

由 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散,可知 $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 发散,从而原积分发散.

(2)类似于(1),有

$$\text{原积分} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t} \xlongequal{\Delta} \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

而

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+t)^4\sin^2 t} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi+\pi-t)^4\sin^2 t} \\ &\xlongequal{\Delta} u_n' + u_n''. \end{aligned}$$

当 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 时,利用不等式 $\sin t \geqslant \frac{2t}{\pi}$,有

$$(n\pi+t)^4\sin^2 t \geqslant n^4\pi^4\left(\frac{2t}{\pi}\right)^2 = 4\pi^2 n^4 t^2,$$

故

$$u'_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+4\pi^2 n^4 t^2} = \frac{1}{2\pi n^2}\int_0^{n^2\pi^2} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} < \frac{1}{4n^2}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ 收敛. 同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u''_n$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. 由此可知,原积分收敛.

例 4.50 设 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调,0 是奇点. 证明:如果 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \tag{1}$$

反之,如果式(1)左端的极限存在,则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且等式成立.

证明 不妨设 $f(x)$ 单调↓,且 $f(x) \geqslant 0$(否则,考虑函数 $F(x) = f(x) - f(1)$). 将 $(0,1]$ 区间 n 等分,分点为 $\frac{k}{n}(k = 1,2,\cdots,n)$,则当 $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 时,有

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{k-1}{n}\right).$$

那么,若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则由

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

可知,式(1)成立.

反过来,记 $a_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $a_n \geqslant 0$ 且 $\{a_n\} \uparrow$. 若式(1)左端的极限存在,由 $a_n \leqslant \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ 可知,$\{a_n\}$ 上有界. 由单调有界定理便知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在,再注意到 $f(x) \geqslant 0$,故 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 从而式(1)成立.

注 4.9 即使广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛(a 为奇点),一般说来,等式:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\cdot\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

也未必成立. 也就是说,即使收敛的广义积分,如果不附加额外的条件,它一般也不能写成积分和的极限.

例如,广义积分 $\int_0^1 |\ln x|\mathrm{d}x$ 收敛(0 为奇点),且 $\int_0^1 |\ln x|\mathrm{d}x = 1$.

将 $(0,1]$ 区间 n 等分,分点为 $\frac{k}{n}(k = 1,2,\cdots,n)$. 在第一个小区间 $\left(0, \frac{1}{n}\right]$ 内

取两个介点 $\xi_1' = e^{-n}$ 和 $\xi_1'' = e^{-2n}$，而在其余的小区间 $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ 上取介点 $\xi_k' = \xi_k''(k = 2,3,\cdots,n)$. 这样，就有两组介点

$$\{\xi_k'\}: e^{-n}, \xi_2', \xi_3', \cdots, \xi_n',$$

$$\{\xi_k''\}: e^{-2n}, \xi_2'', \xi_3'', \cdots, \xi_n''.$$

相应地，就有两个积分和 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k') \frac{1}{n}$ 与 $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'') \frac{1}{n}$. 作差

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'') \frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k') \frac{1}{n} = \frac{|\ln e^{-2n}| - |\ln e^{-n}|}{n} = 1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'') \frac{1}{n} \neq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k') \frac{1}{n}.$$

这表明，积分和的极限与介点 $\{\xi_k\}$ 的选取有关. 因此，式(2)一般不成立.

例 4.51　(伏茹兰尼(Froullani)积分公式)设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续，$a > 0, b > 0$，有

(1)若 $f(0), f(+\infty)$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = [f(0) - f(+\infty)] \ln \frac{b}{a};$$

(2)若 $f(0)$ 存在，且 $\forall A > 0, \int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a};$$

(3)若 $f(+\infty)$ 存在，且 $\forall A > 0, \int_0^{A} \frac{f(x)}{x} dx$ 存在，则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = -f(+\infty) \ln \frac{b}{a}.$$

(复旦大学).

证明　(1) $\forall [\alpha,\beta] \subset (0, +\infty)$，有

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_\alpha^\beta \frac{f(ax)}{x} dx - \int_\alpha^\beta \frac{f(bx)}{x} dx.$$

分别作变量替换：$ax = t$ 和 $bx = t$，有

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = \int_{a\alpha}^{a\beta} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{b\alpha}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt.$$

$$= \left(\int_{a\alpha}^{b\alpha} + \int_{b\alpha}^{a\beta} - \int_{b\alpha}^{b\beta}\right) \frac{f(t)}{t} dt = \left(\int_{a\alpha}^{b\alpha} - \int_{a\beta}^{b\alpha} - \int_{b\alpha}^{b\beta}\right) \frac{f(t)}{t} dt$$

$$= \int_{a\alpha}^{b\alpha} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{a\beta}^{b\beta} \frac{f(t)}{t} dt. \qquad (1)$$

由第一积分中值定理,有

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t}-f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$=[f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a},$$

其中 ξ 在 $a\alpha$ 与 $b\alpha$ 之间,η 在 $a\beta$ 与 $b\beta$ 之间.

在上式中同时令 $\alpha\to0^{+}$,$\beta\to+\infty$ 可得结论.

(2)当 $\int_{A}^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在时,在式(1)中,令 $\beta\to+\infty$,有 $\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\to0$,于是有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\alpha\to0^{+}}\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t-\lim_{\beta\to+\infty}\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{\xi\to0^{+}}f(\xi)\ln\frac{b}{a}=f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

(3)类似于(2)可证之.

这个公式的证明综合运用了变量替换、区间的可加性及第一积分中值定理.由于第一积分中值定理对无穷积分不再成立,因此首先在有限区间 $[\alpha,\beta]$ 上讨论,然后通过极限过渡到无穷区间 $(0,+\infty)$ 上.这是处理无穷积分的常用方法,希望同学们仔细领会.

利用伏茹兰尼公式可以很快计算出下列积分.

1) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x$;　　2) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$;

3) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^{2}}-\mathrm{e}^{-bx^{2}}}{x}\mathrm{d}x$(可令 $x^{2}=t$);

4) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\mathrm{d}x$,

其中 $a>0,b>0$.

$\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛与 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ 的关系

(1) $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛 $\not\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$(见例4.44);

(2) $\int_{a}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)\geqslant0\not\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$;

例如,取

$$f(x)=\begin{cases}1, & x=n\in\mathbf{N}_{+},\\ 0, & x\geqslant0\text{ 且 }x\neq n\in\mathbf{N}_{+}.\end{cases}$$

显然 $\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛于0,但 $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ 不存在,当然 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0$.

(3) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x) \geqslant 0$ 连续 $\not\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 或 $f(x)$ 有界.

例如,取

$$f(x) = \begin{cases} n - n^4|x-n|, & \text{当 } n - \dfrac{1}{n^3} \leqslant x \leqslant n + \dfrac{1}{n^3} \text{ 时,} \\ & n = 2,3,\cdots. \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为其他正数时,} \end{cases}$$

则 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \int_{n-\frac{1}{n^3}}^{n+\frac{1}{n^3}} [n - n^4|x-n|]\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$,且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上无界.

在 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的前提下,如果对 $f(x)$ 附加上合适的条件可保证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 成立.看下面的几个命题.

命题 4.3　若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

命题 4.4　若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$;

命题 4.5　若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续(或更强地 $f'(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界),则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (武大);

命题 4.6　若 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,$f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可导且 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 也收敛,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (新疆大学).

例 4.52　证明命题 4.5

证法 1　由于 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,所以 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 (\delta \leqslant \varepsilon)$, $\forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$,只要 $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$,就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛知,对上述 $\delta > 0, \exists A_0 \geqslant a, \forall x', x'' > A_0$, 有

$$\left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{\delta^2}{2}.$$

$\forall t > A_0$,取 $x', x'' > A_0$,使 $x' < t < x''$,且 $x'' - x' = \delta$,则有

$$\begin{aligned} |f(x)|\delta &= \left|\int_{x'}^{x''} f(x)\mathrm{d}t - \int_{x'}^{x''} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x'}^{x''} f(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_{x'}^{x''} |f(x) - f(t)|\mathrm{d}t + \left|\int_{x'}^{x''} f(t)\mathrm{d}t\right| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}\delta + \frac{\delta^2}{2},$$

故

$$|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\delta}{2} < \varepsilon.$$

证法 2 用反证法. 若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$,则 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall X > a, \exists x_0 > X$ 使得

$$|f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

因为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,所以对上述 $\varepsilon_0 > 0, \exists 0 < \delta_0 < 1, \forall x_1, x_2 \in [a, +\infty)$,只要 $|x_1 - x_2| < \delta_0$,就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是,对 $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_0\delta_0}{2} > 0, \forall A_0 \geqslant a$,令 $X = A_0 + 1$,取 $x_0 > X$ 使得 $|f(x_0)| \geqslant \varepsilon_0$ 成立. 不妨设 $f(x_0) > 0$,则当 $|x - x_0| < \delta_0$ 时,有

$$f(x) > f(x_0) - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2} > 0.$$

取 $A' = x_0 - \dfrac{\delta_0}{2}$ 和 $A'' = x_0 + \dfrac{\delta_0}{2}$,则 $A'' > A' > A_0$,且有

$$\left|\int_{A'}^{A''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{x_0-\frac{\delta_0}{2}}^{x_0+\frac{\delta_0}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| > \frac{\varepsilon_0}{2}\delta_0 = \varepsilon_1. \qquad (*)$$

由柯西准则知,$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 不收敛,矛盾.

(若 $f(x_0) < 0$,则当 $|x - x_0| < \delta_0$ 时,有 $f(x) < \dfrac{\varepsilon_0}{2} + f(x_0) \leqslant -\dfrac{\varepsilon_0}{2}$,即 $-f(x) > \dfrac{\varepsilon_0}{2}$. 这样将式(*)中的 $f(x)$ 用 $-f(x)$ 代替,不等式仍然成立).

例 4.53 若函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上正值单调减少,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,则 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与极限 $\lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 同时收敛,且 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$. 并由此求极限 $\lim\limits_{t\to1^-}(1-t)\left(\dfrac{t}{1+t} + \dfrac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \dfrac{t^n}{1+t^n} + \cdots\right)$.

分析 欲证 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\lim\limits_{h\to0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 中有一个收敛,另一个必收敛. 只需证:$\forall \varepsilon > 0$,当 $h > 0$ 充分小时,有

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)\right| < \varepsilon$$

成立即可.

证明　由f在$[0,+\infty)$上正值单调减少,有

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

和

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f((n+1)h)\\ &= h\sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) - hf(0).\end{aligned}$$

于是,

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh) - hf(0) \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh).$$

显然,$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 与$\lim\limits_{h\to 0^+} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f(nh)$ 同时收敛,且

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)\right| \leqslant hf(0).$$

在上式中,令$h\to 0^+$就得到所要证的等式.

取$f(x)=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$,则$f(x)>0$在$[0,+\infty)$上单调减少,且$\int_0^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln 2$,所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x} = \lim_{h\to 0^+} h\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{1+\mathrm{e}^{nh}} = \lim_{t\to 1^-}(-\ln t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \ln 2 \quad (\text{令 } h=-\ln t).$$

注意到$\lim\limits_{t\to 1^-}\dfrac{-\ln t}{1-t}=1$,我们有

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \lim_{t\to 1^-}(-\ln t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{1+t^n} = \ln 2.$$

第五讲　级　　数

在这一讲中,我们将涉及数项级数敛散性的判定及其性质、函数项级数敛散性的判定及其性质、幂级数的收敛域及其在收敛域上的性质、傅里叶级数及其性质等内容. 本讲内容丰富、应用广泛、难度较大、考研份量重.

一、数项级数

1. 求和

求和是一个困难而复杂的问题,没有特别好的办法. 常用的方法:1)用一些特殊技巧先求出前 n 项部分和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,然后取极限求出级数的和;2)借助于几何级数求和;3)子列法求和,即若已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,通过求 S_{2n}(或 S_{2n+1} 或 S_{3n} 等)的极限得到了级数的和(注意这里 S_{2n} 等要容易求出才行!);4)借助于幂级数、傅里叶级数求和.

2. 正项级数敛散性的判定

常用的方法:

1)收敛原理,即正项级数收敛的充要条件是它的部分和数列有上界;

2)比较法. 在使用比较法判定级数敛散性时,首先要对级数的敛散性有个精确地估计,然后通过不等式的放大或缩小找到合适的比较级数;

3)根式判别法;

4)比式判别法.

根式判别法和比式判别法都是比较法的具体化,它们是以几何级数作为比较级数而建立的. 另外,凡是能用比式判别法判别的级数一定能用根式判别法判别,但反之不行! 换言之,就是根式判别法比比式判别法有更广的适用范围.

除了上述大家熟悉的判别法外,下面我们再介绍几个判别法.

5)拉贝(Raabe)判别法.

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$,记 $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$,则 $\gamma > 1$ 时,级数收敛;当 $\gamma < 1$ 时,级数发散.

6)高斯(Gauss)判别法.

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$,若 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \dfrac{\mu}{n} + \dfrac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$($\theta_n$ 有界,$\varepsilon > 0$),则当 $\lambda > 1$ 或 $\lambda = 1$ 而 $\mu > 1$ 时,级数收敛;当 $\lambda < 1$ 或 $\lambda = 1$ 而 $\mu \leqslant 1$ 时,级数发散.

7)柯西判别法.

若 $\{a_n\}$ 为递减正数列,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ 同敛散.

8)对数判别法.

对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \neq 0)$,若 $\exists \alpha > 0$ 及自然数 N,当 $n > N$ 时,有

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geqslant 1 + \alpha,$$

则级数收敛;

若存在自然数 N,使当 $n > N$ 时,

$$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \leqslant 1,$$

则级数发散.

9)柯西积分判别法.

设 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上非负且递减,则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ 同敛散.

需要特别说明的是:拉贝判别法和对数判别法都是以 p 级数作为比较级数而建立的,而高斯判别法则是以比 p 级数收敛得更慢的级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} (\alpha > 1)$ 作为比较级数而建立的. 从比式判别法(或根式判别法)到拉贝判别法(或对数判别法)再到高斯判别法虽然适用范围一个比一个更广泛,但由于我们找不到(事实上也不存在)一个收敛最慢的级数作为比较级数,因此也就无法建立适用于一切正项级数的判别法.

另外,我们还会经常用到如下的

斯特林(Stirling)公式:$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-n} (n \to \infty)$.

3. 变号级数敛散性的判定

常用的方法:

1)柯西收敛准则;

2)狄里克雷判别法(简称 D-法). 它是判别条件收敛的有用方法;

3)阿贝尔判别法(简称 A-法). 它也是判别条件收敛的有用方法;

4)莱布尼茨判别法. 它是 D-法的特殊情形.

至于绝对收敛性的判定,正项级数的判别法对它都适用. 需要注意的是:虽然一般来说,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散并不能推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,但若用根式法或比式法判别出

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 一定发散. 这是因为这两个判别法判定发散的依据是级数的通项不趋于0,即不满足收敛的必要条件.

4. 证明级数发散常用的方法

1)证明通项不趋于零;

2)利用柯西收敛准则;

3)证明按某一方式加括号后所得到的级数发散;

4)对正项级数,证明前 n 项部分和数列无上界;

5)对正项级数,利用包含发散内容的各种判别法(例如,拉贝判别法,当 $\gamma<1$ 时发散);

6)利用级数的运算性质,即将通项 a_n 写成 $a_n=a'_n+a''_n$,然后说明 $\sum_{n=1}^{\infty}a'_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a''_n$ 中有一个收敛,而另一个发散.

5. 收敛级数的性质

绝对收敛的级数具有有限和的性质,即满足:结合律、交换律和分配律,而条件收敛的级数只满足结合律,不满足交换律和分配律,并具有奇特的性质:如,黎曼定理所述的性质.

两个绝对收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$、$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 相乘,按任何方式排列 $a_ib_j(i,j=1,2,\cdots)$ 求和所得到的级数仍然绝对收敛.

记

$$a_n^+=\begin{cases}a_n, & \text{当 } a_n\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } a_n<0 \text{ 时}.\end{cases}\qquad a_n^-=\begin{cases}0, & \text{当 } a_n\geqslant 0 \text{ 时},\\ -a_n, & \text{当 } a_n<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都发散到 $+\infty$.

例 5.1 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 之和.

解 用 S_n 表示级数的前 n 项部分和,则

$$\begin{aligned}S_n&=2S_n-S_n=2\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\\&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2^k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2^k}\end{aligned}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k+1}{2^k} - \frac{2k-1}{2^k}\right) - \frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{2n-1}{2^n}.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3.$$

例 5.2　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}(x \neq k\pi)$ 之和.

解　由 $\cot 2x = \dfrac{1-\tan^2 x}{2\tan x}$，可得

$$2\cot 2x = \cot x - \tan x, \text{即 } \tan x = \cot x - 2\cot 2x.$$

于是

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\left(\cot\frac{x}{2^k} - 2\cot\frac{x}{2^{k-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^n}\cot\frac{x}{2^n} - \cot x \to \frac{1}{x} - \cot x (n \to \infty),$$

故所求的级数之和为 $\dfrac{1}{x} - \cot x$.

例 5.3　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$;　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$;

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$;　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$.

(数学 I).

解　因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 收敛，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$ 收敛，应选(D).

对选项(A)，考察 $u_n = (-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$；对选项(B)，考察 $u_n = (-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$；对选项(C)，考察 $u_n = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

例 5.4　设 $u_n \neq 0$，且 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n} = 1$，考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的绝对收敛性(数学 I).

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$ 可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{u_n}=0$. 而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\frac{1}{u_k}+\frac{1}{u_{k+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1},$$

即所考察的级数收敛. 但由

$$\left|\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right|=\frac{1}{n}\left|\frac{n}{u_n}+\frac{n}{u_{n+1}}\right|\sim\frac{2}{n}\quad(n\to\infty)$$

可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}\right|$ 发散，故原级数为条件收敛.

例 5.5 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1)$ 的敛散性.

解 因为 $a_n=n^{\frac{1}{n^2+1}}-1=\mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2+1}}-1=\dfrac{\ln n}{1+n^2}+o\left(\dfrac{\ln n}{1+n^2}\right)\quad(n\to\infty)$，

又注意到 $\ln n=O(n^{\varepsilon})(n\to\infty)\quad(\varepsilon>0$ 充分小$)$，可得

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^{2-\varepsilon}}\right)(n\to\infty).$$

由此知，原级数收敛.

注 5.1 在本例的求解中，我们使用了阶方法. 它适用于正项级数，依据是比较判别法. 请同学们注意领会，并学以致用.

例 5.6 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n)=1$，问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是否收敛？试证明之(上海交大).

解 由 $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{2n\sin\frac{1}{n}}a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{-2n\sin\frac{1}{n}}}=1$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{-2n\sin\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)^{n\sin\frac{1}{n}}=0$

可知，当 $n\to\infty$ 时，a_n 与 $n^{-2n\sin\frac{1}{n}}$ 为等价无究小量.

又由

$$0\leqslant n^{-2n\sin\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{n^2}(n\to\infty)$$

知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

例 5.7 研究下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+an+b})$，$0\leqslant a\leqslant 2$，$0\leqslant b\leqslant 1$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}$ (上海交大).

解　(1)因为

$$\begin{aligned}a_n&=\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+an+b}\\&=\frac{(n+1)-\sqrt{n^2+an+b}}{\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b}}\\&=\frac{(n+1)^2-(n^2+an+b)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b})(n+1+\sqrt{n^2+an+b})}\\&=\frac{(2-a)n+(1-b)}{(\sqrt{n+1}+\sqrt[4]{n^2+an+b})(n+1+\sqrt{n^2+an+b})},\end{aligned}$$

所以当 $n\to\infty$ 时,

$$a_n\sim\begin{cases}\dfrac{2-a}{4\sqrt{n}}, & \text{当 } a\neq 2 \text{ 时},\\[2ex] \dfrac{1-b}{4n\sqrt{n}}, & \text{当 } a=2 \text{ 时}.\end{cases}$$

由此可见,当 $a\neq 2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;当 $a=2$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(2)因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\uparrow$ 趋向于 e,所以这是一个正项级数.

由 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 可得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}&=\mathrm{e}\left[1-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1}\right]\\&=-\mathrm{e}\left\{\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}\\&=\mathrm{e}\left[\frac{1}{2n}-\frac{11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right].\end{aligned}$$

于是有,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{n}\left[\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{p}\\&=\frac{\mathrm{e}^{p}}{n}\left[\frac{1}{2n}-\frac{11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{p}\sim\left(\frac{\mathrm{e}}{2}\right)^{p}\frac{1}{n^{1+p}}(n\to\infty).\end{aligned}$$

由此可见,当 $p>0$ 时,级数收敛;当 $p\leqslant 0$ 时,级数发散.

例 5.8　证明对数判别法(哈工大).

证明　(1)由所给的不等式,当 $n>N$ 时,有

$$\ln\frac{1}{a_n}\geqslant(1+\alpha)\ln n,$$

即

$$\frac{1}{a_n} \geqslant n^{1+\alpha},$$

或

$$a_n \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}}.$$

利用比较法,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛可知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

(2)类似地,当 $n > N$ 时,有

$$\ln \frac{1}{a_n} \leqslant \ln n,$$

即

$$a_n \geqslant \frac{1}{n}.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

利用对数判别法,可很方便地讨论下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln x}(x > 0)$ $\left(\text{当} 0 < x < \frac{1}{\mathrm{e}} \text{时,收敛;当} x \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}} \text{时,发散}\right)$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ (收敛);

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ (发散);

(4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$ (收敛);

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ $(a > 0)$.

提示 $\dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} \cdot (-\ln a)$,

由施图兹定理易知, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = -\ln a$. 当 $-\ln a > 1$,即 $0 < a < \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数收敛;当 $-\ln a \leqslant 1$,即 $a \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数发散.

例 5.9 若 $a_n > 0$,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散;(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{\,2}}$ 收敛(第(2)问,东北师大).

证明　(1)用柯西准则.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}>0$, $\forall N\in\mathbf{N}_+$ (固定),取 $n'=N+1>N$. 由于 $\{S_n\}\uparrow$ 趋向于 $+\infty$,所以对固定的 N ,存在 $p'>N$ 适当大,可使 $\dfrac{S_{N+1}}{S_{N+1+p'}}<\dfrac{1}{2}$. 于是有

$$\begin{aligned}\frac{a_{n'+1}}{S_{n'+1}}+\frac{a_{n'+2}}{S_{n'+2}}+\cdots+\frac{a_{n'+p'}}{S_{n'+p'}}&\geqslant\frac{S_{n'+p'}-S_{n'}}{S_{n'+p'}}\\&=1-\frac{S_{n'}}{S_{n'+p'}}=1-\frac{S_{N+1}}{S_{N+1+p'}}\\&>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,\end{aligned}$$

由柯西准则知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n}$ 发散.

(2)因为 $S_n\leqslant S_{n+1}$, 所以

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^2}\leqslant\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n\cdot S_{n+1}}=\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n+1}}.$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{S_n}-\dfrac{1}{S_{n+1}}\right)$ 收敛于 $\dfrac{1}{a_1}$,故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^2}$ 收敛.

注 5.2　一般地,对任意的 $\alpha>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{S_n^{1+\alpha}}$ 收敛.

事实上,对函数 $f(x)=-\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}$ 在 $[S_n,S_{n+1}]$ 上使用拉格朗日中值定理,有

$$\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{S_n^{\alpha}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha}}\right)=\frac{a_{n+1}}{\xi_n^{\alpha+1}},\quad \xi_n\in(S_n,S_{n+1}).$$

于是

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^{\alpha+1}}<\frac{a_{n+1}}{\xi_n^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{S_n^{\alpha}}-\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha}}\right),$$

由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{S_n^{\alpha}}-\dfrac{1}{S_{n+1}^{\alpha}}\right)$ 收敛,可推出级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}^{\alpha+1}}$ 收敛.

类题 1　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(a_n>0)$ 发散,证明:存在收敛于零的正数列 $\{b_n\}$,使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 仍然发散(解放军信息工程大学).

提示 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,取 $b_n = \dfrac{1}{S_n}$ 即可.

类题 2 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0, n = 1,2,\cdots)$,证明:必存在发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$.

提示 设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,取 $b_1 = \sqrt{S_1}, b_n = \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} (n = 2,3,\cdots)$ 即可.

例 5.10 证明柯西判别法.

证明 因为对正项级数,任意加括号不改变其敛散性,所以由

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + (a_8 + \cdots + a_{15}) + \cdots$$

$$\leqslant a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$$

和

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + (a_9 + \cdots + a_{16}) + \cdots$$

$$\geqslant a_1 + a_2 + 2a_4 + 2^2 a_{2^3} + 2^3 a_{2^4} + \cdots$$

$$= a_1 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m}$$

知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=0}^{\infty} 2^m a_{2^m}$ 同敛散.

利用这个结果,可证明:当 $p > 1$ 时,下列级数收敛.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n(\ln n)^p}$;　　(2) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$.

证明:(1) $\left\{\dfrac{1}{n(\ln n)^p}\right\}$ 是 ↓ 正数列,且

$$2^m a_{2^m} = 2^m \frac{1}{2^m (\ln 2^m)^p} = \frac{1}{(\ln 2)^p} \cdot \frac{1}{m^p}.$$

由 $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \dfrac{1}{(\ln 2)^p} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^p}$ 收敛,知原级数收敛.

(2) $\left\{\dfrac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}\right\}$ 是 ↓ 正数列,且

$$2^m a_{2^m} = 2^m \frac{1}{2^m \ln 2^m (\ln\ln 2^m)^p}$$

$$= \frac{1}{m\ln 2(\ln m + \ln\ln 2)^p},$$

而

$$\frac{1}{m\ln 2(\ln m+\ln\ln 2)^p}\Big/\frac{1}{m(\ln m)^p}\to\frac{1}{\ln 2}>0\quad(m\to\infty).$$

由(1)知,级数 $\sum\limits_{m=2}^{\infty}\dfrac{1}{m\ln 2(\ln m+\ln\ln 2)^p}$ 收敛,从而原级数收敛.

由此可见,当 $p>1$ 时,正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$$

都收敛,依次后者比前者收敛较慢. 类似地,可继续写出收敛得更慢的正项级数(从这,也可说明不存在收敛最慢的正项级数). 当 $p\leqslant 1$ 时,它们都发散.

例 5.11　设 $\{p_n\}$ 为正数列,证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_n}$ 收敛,则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(p_1+p_2+\cdots+p_n)^2}p_n$$

也收敛.

证明　用收敛原理.

引进记号 $q_0=0,q_n=\sum\limits_{i=1}^{n}p_i,T_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{p_i},T=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\dfrac{1}{p_i}<+\infty$.

下面估计部分和数列的上界. 令

$$S_m=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{n}{q_n}\right)^2(q_n-q_{n-1}),$$

则

$$\begin{aligned}S_m&\leqslant\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2}{q_nq_{n-1}}(q_n-q_{n-1})\\&\leqslant\frac{1}{p_1}+\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2}{q_{n-1}}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2}{q_n}\\&=\frac{1}{p_1}+\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(n+1)^2}{q_n}-\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2}{q_n}\\&<\frac{5}{p_1}+2\sum_{n=2}^{m}\frac{n}{q_n}+\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{q_n}.\end{aligned}$$

由柯西不等式,有

$$\left(\sum_{n=2}^{m}\frac{n}{q_n}\right)^2=\left(\sum_{n=2}^{m}\frac{n}{q_n}\sqrt{p_n}\cdot\frac{1}{\sqrt{p_n}}\right)^2\leqslant\left(\sum_{n=2}^{m}\frac{n^2}{q_n^2}p_n\right)\left(\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{p_n}\right),$$

代入上式可得

$$S_m<\frac{5}{p_1}+2\sqrt{S_m\cdot\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{p_n}}+\sum_{n=2}^{m}\frac{1}{q_n}$$

$$< \frac{5}{p_1} + 2\sqrt{S_m T} + T.$$

令 $S_m = y^2$，则有

$$y^2 - 2\sqrt{T}y - \left(T + \frac{5}{p_1}\right) \leqslant 0.$$

解该不等式可知，

$$\sqrt{S_m} = y \leqslant \sqrt{T} + \sqrt{2T + \frac{5}{p_1}}, \forall m.$$

这表明 $\{S_m\}$ 有上界. 由收敛原理知，原级数收敛.

例 5.12 设 $x_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) > 0$. 证明：交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛.

证明 先证明一个不等式. 设 $\beta > \alpha > 0$，则 $\forall x \in (0,\delta)$（$\delta > 0$ 适当小），有

$$1 + \beta x > (1 + x)^{\alpha}. \tag{1}$$

事实上，令 $f(x) = 1 + \beta x - (1 + x)^{\alpha}$，由 $f(0) = 0$ 和 $f'(0) = \beta - \alpha > 0$ 可知，存在 $\delta > 0$，当 $x \in (0,\delta)$ 时，有 $f(x) > f(0)$，即式(1)成立.

下面回到本题. 由已知的极限，当 n 适当大时，$\{x_n\}$ 单调递减. 设所给的极限为 $\gamma > 0$，取 $\alpha, \beta > 0$ 满足 $\gamma > \beta > \alpha > 0$，则当 n 适当大时，有

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} > 1 + \frac{\beta}{n} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\alpha} = \frac{(1 + n)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

这里应用了不等式(1). 由此可知，存在 $A > 0$，使当 n 适当大时，有

$$0 < x_n < \frac{A}{n^{\alpha}}.$$

由莱布尼茨判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n$ 收敛.

例 5.13 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^s}$ 的敛散性 $(s > 0)$.

在讨论这个题目之前，我们先引述一个命题.

命题 5.1 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 加括号，且在每个括号内各项的符号相同. 若加括号所得到的级数收敛，则原来的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

这个命题不难用级数收敛的定义或柯西收敛准则予以证明. 由此可见，任何变号级数都可以采用加括号的方法，使其成为一个交错级数，且两者的敛散性相同.

解 (1)当 $s > 1$ 时，易知级数绝对收敛.

为了讨论 $0 < s \leqslant 1$ 时级数的敛散性. 先将级数中相邻的同号项合并构成一个

交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$,其中

$$a_n = \frac{1}{n^{2s}} + \frac{1}{(n^2+1)^s} + \cdots + \frac{1}{[(n+1)^2-1]^s}.$$

(2)当 $s \leqslant \frac{1}{2}$ 时,由

$$a_n \geqslant \frac{2n+1}{(n^2+2n)^s} > \frac{2n+1}{(n+1)^{2s}} > \frac{2n+1}{n+1} > 1$$

可知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,从而原来的级数发散.

(3)当 $\frac{1}{2} < s \leqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n^{2s}}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^s} = \frac{1}{n^{2s}}\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{1+\frac{ks}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)} \\ &= \frac{1}{n^{2s}}\sum_{k=0}^{2n}\left[1-\frac{ks}{n^2}+O\left(\frac{k^2}{n^4}\right)\right] \\ &= \frac{1}{n^{2s}}\left[(2n+1)-\frac{n(2n+1)}{n^2}s+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{2n+1}{n^{2s}}-\frac{2n+1}{n^{2s+1}}s+O\left(\frac{1}{n^{2s+1}}\right). \end{aligned}$$

通过计算易知

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n+2}{n^{2s+1}}s + O\left(\frac{1}{n^{2s+1}}\right).$$

因为当 $\frac{1}{2} < s \leqslant 1$ 时,$2s > 1$,所以由上可知,当 n 适当大时 $\{a_n\}$ 单调递减趋向于0. 由莱布尼茨判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛,从而原来的级数收敛. 注意到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ $\left(\frac{1}{2} < s \leqslant 1\right)$ 发散,故原级数条件收敛.

例 5.14　研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{[3^n+(-2)^n]n}$ 的敛散性(包括条件收敛、绝对收敛).

解　记 $u_n = \frac{(-3)^n}{[3^n+(-2)^n]n}$,由泰勒公式,可得

$$u_n = (-1)^n\frac{1}{n}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]^{-1}$$

$$= (-1)^n \frac{1}{n}\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n + o\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + o\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \quad (n \to \infty).$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + o\left(\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right]$ 绝对收敛，所以原级数条件收敛.

例 5.15 证明：级数 $1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$ 发散于 $+\infty$.

证明 考察

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{4k-3}} + \frac{1}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{4k-1}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right) > \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{2k}}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{n}.$$

显然 $S_{3n} \to +\infty$ $(n \to \infty)$. 对 $\forall m \in \mathbf{N}_+$，$\exists n \in \mathbf{N}_+$，使 $m = 3n + i(i = 0,1,2)$. 由于级数的通项趋于 0，故当 m 适当大时，有

$$S_m > S_{3n} - 1,$$

从而 $S_m \to +\infty$ $(m \to \infty)$.

本例是通过估计 $\{S_n\}$ 的一个子列发散性而证得原级数发散的，这正是所谓的子列法. 在级数求和中我们曾经用过这种思想.

例 5.16 讨论级数

$$\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q} + \cdots$$

$(p > 0, q > 0)$ 的敛散性(复旦大学).

解 (1)若 $p > 1, q > 1$，则

$$|a_n| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{n^p}, & p \leqslant q, \\ \dfrac{1}{n^q}, & p > q. \end{cases}$$

由比较法知，原级数绝对收敛.

(2)若 $0 < p \leqslant 1, q > 1$(或 $p > 1, 0 < q \leqslant 1$)，则如下加括号后得到下面的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^q}\right). \tag{1}$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^p}$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^q}$ 收敛知，级数(1)发散，从而原级数发散.

(3)若 $0<p<q\leqslant 1$(或 $0<q<p\leqslant 1$)，由于

$$\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}>0$$

且

$$\frac{1}{(2n-1)^p}-\frac{1}{(2n)^q}=\frac{1}{(2n-1)^p}\left[1-\frac{(2n-1)^p}{(2n)^q}\right]$$

$$\sim\frac{1}{(2n-1)^p}\quad(n\to\infty).$$

所以此时级数(1)发散，从而原级数发散.

(4)若 $0<p=q\leqslant 1$，级数为交错级数. 由莱布尼茨判别法，它收敛且为条件收敛.

综上所述，当 $p>1,q>1$ 时，级数绝对收敛；当 $0<p=q\leqslant 1$ 时，级数条件收敛；其余的情形级数发散.

下面的例子是例 5.16 的推广.

例 5.17　求级数 $\dfrac{1}{1^{x^2+y^2}}-\dfrac{1}{2^z}+\dfrac{1}{3^{x^2+y^2}}-\dfrac{1}{4^z}+\cdots$ 的条件收敛域 Ω 的测度.

分析　先确定所给级数的条件收敛域 Ω，然后计算它的测度.

解　设级数的通项为 u_n，则

(1)当 $\min\{x^2+y^2,z\}>1$ 时，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛可知，原级数绝对收敛；

(2)当 $\min\{x^2+y^2,z\}\leqslant 0$ 时，由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$ 可知，原级数发散；

(3)当 $0<\min\{x^2+y^2,z\}\leqslant 1$ 时，分三种情形讨论.

(i)若 $x^2+y^2<z$(此时 $x^2+y^2\leqslant 1$). 由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{2n}|}{|u_{2n-1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{(2n)^z}}{\dfrac{1}{(2n-1)^{x^2+y^2}}}=0$$

可知，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|u_{2n}|<\dfrac{1}{2}|u_{2n-1}|$，即

$$\frac{1}{(2n)^z}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2n-1)^{x^2+y^2}}.$$

所以

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}u_k=\sum_{k=1}^{N}(u_{2k-1}-u_{2k})+\sum_{k=N+1}^{2n}\left[\frac{1}{(2k-1)^{x^2+y^2}}-\frac{1}{(2k)^z}\right]$$

$$> \sum_{k=1}^{N}(u_{2k-1}-u_{2k})+\sum_{k=N+1}^{2n}\left[\frac{1}{(2k-1)^{x^2+y^2}}-\frac{1}{2(2k-1)^{x^2+y^2}}\right]$$

$$=\sum_{k=1}^{N}(u_{2k-1}-u_{2k})+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{2n}\frac{1}{(2k-1)^{x^2+y^2}}\to+\infty\ (n\to\infty),$$

故原极数发散;

(ii)若 $x^2+y^2>z$(此时 $0<z\leqslant 1$),仿照(i)可证原极数发散;

(iii)若 $x^2+y^2=z$(此时 $0<z\leqslant 1$),则原级数变成

$$\frac{1}{1^z}-\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}-\frac{1}{4^z}+\cdots,$$

显然是条件收敛的.

综上所述,使得原级数条件收敛的区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid z=x^2+y^2,0<z\leqslant 1\}$ 是空间曲面,它的测度就是该曲面的面积. 于是,有

$$|\Omega|=S=\iint_{\Omega}\mathrm{d}S=\iint_{Dxy}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是 Ω 在 xOy 平面的投影.

在极坐标变换下,有

$$S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{1+4r^2}\mathrm{d}r=\pi\int_0^1\sqrt{1+4r}\mathrm{d}r$$

$$=\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}(1+4r)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1).$$

例 5.18 证明:(1)级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛的充要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛;

(2)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都发散于 $+\infty$;

(3)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛,记 $S_n^+=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^+,S_n^-=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k^-$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n^-}{S_n^+}=1$.

证明 由 a_n^+ 和 a_n^- 的定义知,$a_n=a_n^+-a_n^-$,$|a_n|=a_n^++a_n^-$.

(1)($\Rightarrow$)因为 $0\leqslant a_n^+\leqslant|a_n|$,$0\leqslant a_n^-\leqslant|a_n|$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 都收敛.

($\Leftarrow$)因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

(2)用反证法. 假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^-$ 中有一个收敛. 不妨设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^+$ 收敛,由 $a_n^+=\dfrac{|a_n|+a_n}{2}$,即 $|a_n|=2a_n^+-a_n$ 可推知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛,从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,

矛盾.

再由 $a_n^+ \geqslant 0, a_n^- \geqslant 0$ 可推知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散于 $+\infty$.

(3)记 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^+ - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^- = S_n^+ - S_n^-$, 则

$$S_n^- = S_n^+ - S_n.$$

注意到 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在,故

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n^-}{S_n^+} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{S_n^+} = 1.$$

注 5.3　本例告诉我们,条件收敛级数的正部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和负部 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都发散于 $+\infty$,且它们发散的速度相同. 由此可见,条件收敛级数的收敛是靠正项和负项的相互抵消来实现的.

例 5.19　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 绝对收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

证明　用柯西收敛准则.

由已知条件, $\exists M > 0, \forall n \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant M.$$

所以 $\forall t \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+t} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m+t} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k \right| \leqslant \left| \sum_{k=1}^{m+t} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{m} a_k \right| \leqslant 2M.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_n)$ 绝对收敛及柯西收敛准则知: $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 > 0$,当 $m > N_1$ 时, $\forall p \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\sum_{k=m+1}^{m+p} |b_{k+1} - b_k| < \varepsilon.$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 知,对上述 $\varepsilon > 0, \exists N_2 > 0$,当 $n > N_2$ 时,有 $|b_n| < \varepsilon$.

取 $N = \max\{N_1, N_2\} > 0$,当 $m > N, \forall p \in \mathbf{N}_+$,利用阿贝尔变换,有

$$\left| \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k b_k \right| = \left| (b_{m+1} - b_{m+2}) a_{m+1} + (b_{m+2} - b_{m+3}) \sum_{k=m+1}^{m+2} a_k + \cdots + \right.$$

$$\left. (b_{m+p-1} - b_{m+p}) \sum_{k=m+1}^{m+p-1} a_k + b_{m+p} \sum_{k=m+1}^{m+p} a_k \right|$$

$$\leqslant |b_{m+1}-b_{m+2}|\left|\sum_{k=m+1}^{m+2}a_k\right|+|b_{m+2}-b_{m+3}|\left|\sum_{k=m+1}^{m+3}a_k\right|+\cdots+$$

$$|b_{m+p-1}-b_{m+p}|\left|\sum_{k=m+1}^{m+p-1}a_k\right|+|b_{m+p}|\left|\sum_{k=m+1}^{m+p}a_k\right|$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{m+p-1}|b_{k+1}-b_k|\right)\cdot 2M+|b_{m+p}|\cdot 2M<4M\varepsilon,$$

由柯西收敛准则知,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

值得注意的是,在对和式 $\sum\limits_{k=m+1}^{m+p}a_kb_k$ 作讨论时,阿贝尔变换常常是有力的工具.

例 5.20 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln n\right)}{n}$ 的敛散性(中山大学).

解 用柯西收敛准则.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{2}{\pi}>0$,对 $\forall N\in\mathbf{N}_+$,让自然数 k 适当大,取 $n'=[\mathrm{e}^{4k-1}]\geqslant N$,

$p'=[\mathrm{e}^{4k+1}]-[\mathrm{e}^{4k-1}]$,显然 $p'\in\mathbf{N}_+$. 考察 $\left|\sum\limits_{i=n'}^{n'+p'}\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln i\right)}{i}\right|$.

注意到,当 $\mathrm{e}^{4k-1}\leqslant i\leqslant\mathrm{e}^{4k+1}$ 时,有 $2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{2}\ln i\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$,因此

$$\left|\sum_{i=n'}^{n'+p'}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln i\right)}{i}\right|=\sum_{i=n'}^{n'+p'}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln i\right)}{i}>\int_{\mathrm{e}^{4k-1}}^{\mathrm{e}^{4k+1}-1}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right)}{x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right)\Big|_{\mathrm{e}^{4k-1}}^{\mathrm{e}^{4k+1}-1}=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\ln(\mathrm{e}^{4k+1}-1)\right)+1\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-(4k+1)})\right)+1\right]$$

$$>\frac{2}{\pi}=\varepsilon_0>0,$$

这里注意到了 $\ln(1-\mathrm{e}^{-(4k+1)})>\ln\mathrm{e}^{-1}=-1$(当 k 适当大时). 由柯西收敛准则可知,原级数发散.

例 5.21 设级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a_n}{\ln n}$ 收敛,正数列 $\{na_n\}$ 单调递减趋于零,试证:$\lim\limits_{n\to\infty}na_n\ln\ln n=0$(南开).

证明 分两步证明.

(1) 先证:$\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_{n^2}\ln\dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}=0$.

用 S_n 表示级数的前 n 项部分和，注意到 $a_n > 0$，则有

$$\begin{aligned} S_{n^2} - S_n &= \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{a_k}{\ln k} = \sum_{k=n+1}^{n^2} \frac{k a_k}{k \ln k} \\ &\geqslant n^2 a_{n^2} \left(\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + \frac{1}{(n+2)\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{n^2 \ln n^2} \right) \\ &\geqslant n^2 a_{n^2} \int_{n+1}^{n^2+1} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = n^2 a_{n^2} \ln \frac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)}. \end{aligned}$$

由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{a_n}{\ln n}$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n^2} - S_n) = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_{n^2} \ln \dfrac{\ln(n^2+1)}{\ln(n+1)} = 0$.

并且容易看出，也有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 a_{n^2} \ln \dfrac{\ln((n+1)^2+1)}{\ln((n+1)+1)} = 0$.

(2) 再证：$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n \ln \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(\sqrt{n}+1)} = 0$.

事实上，对任意的正整数 n，存在唯一的正整数 m，使得 $m^2 \leqslant n < (m+1)^2$. 由 $\{n a_n\}$ 单调递减，可得

$$\begin{aligned} m^2 a_{m^2} \ln \frac{\ln((m+1)^2+1)}{\ln((m+1)+1)} &\geqslant n a_n \ln \frac{\ln((m+1)^2+1)}{\ln((m+1)+1)} \\ &\geqslant (m+1)^2 a_{(m+1)^2} \ln \frac{\ln((m+1)^2+1)}{\ln((m+1)+1)}. \end{aligned}$$

由两边夹定理，并用(1) 的结论，有

$$\lim_{n\to\infty} n a_n \ln \frac{\ln((m+1)^2+1)}{\ln((m+1)+1)} = 0 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty} n a_n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln(\sqrt{n}+1)} = 0.$$

注意到，当 $n \to \infty$ 时，$\ln \dfrac{\ln(n+1)}{\ln(\sqrt{n}+1)} \sim \ln\ln\sqrt{n}$（关于这一结论，可将离散变量 $\sqrt{n}$ 换成连续变量 x，然后用洛必达法则得到），并利用 $\lim\limits_{n\to\infty} n a_n = 0$，则有

$$\lim_{n\to\infty} n a_n \ln\ln n = \lim_{n\to\infty} (n a_n \ln\ln n - n a_n \ln 2) = \lim_{n\to\infty} n a_n \ln\ln \sqrt{n} = 0.$$

二、函数项级数

1. 函数项级数（或函数列）的一致收敛性.

1) 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上（点态）收敛于 $S(x)$ 是指：$\forall x_0 \in D$，数列 $\{S_n(x_0)\}$ 收敛于 $S(x_0)$. 用 ε—N 的语言表示就是：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon, x_0) > 0$，当 $n > N$ 时，成立

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

我们通常说的“函数列在 D 上收敛”就是指的“点态收敛”.

2) 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 是指：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon) > 0$，

当 $n > N$ 时，$\forall x \in D$，恒成立

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$$

记为 $S_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} S(x)(n \to \infty)$.

若对 $\forall [\alpha,\beta] \subset D$，都有 $S_n(x) \overset{[\alpha,\beta]}{\rightrightarrows} S(x)(n \to \infty)$，则称 $\{S_n(x)\}$ 在 D 上**内闭一致收敛**.

一致收敛是整体概念(像函数在 $[a,b]$ 上一致连续一样)，而点态收敛是局部概念(像函数的连续性、可导性一样). 因此，由函数列在 D 上内闭一致收敛并不能得到函数列在 D 上一致收敛. 反之是可以的.

从定义上看，点态收敛的 N 与 x_0 有关，而一致收敛的 N 与 x_0 无关，它适用于 D 中一切 x. 因此，点态收敛能否成为一致收敛的关键是：$\sup\limits_{x_0 \in D}\{N(\varepsilon,x_0)\} < +\infty$ 是否成立?

例如，$S_n(x) = x^n, x \in [0,1)$. 显然 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上点态收敛于 $S(x) = 0$. $\forall 0 < \varepsilon < 1$，要使 $|S_n(x) - S(x)| = x^n < \varepsilon$，必须 $n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}$，因此可取 $N(\varepsilon,x) = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right]$. 而

$$\sup_{x \in [0,1)}\{N(\varepsilon,x)\} = +\infty,$$

因此，$\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛于 $S(x)$.

3) $\{S_n(x)\}$ 在 D 上不一致收敛于 $S(x)$ 是指：$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N > 0, \exists n_0 > N$ 和 $x' \in D$，使得 $|S_{n_0}(x') - S(x')| \geqslant \varepsilon_0$，记为 $S_n(x) \overset{D}{\not\rightrightarrows} S(x)(n \to \infty)$.

2. 一致收敛的判别法

对函数列常用的一致收敛的判别法有 1)用定义；2)柯西一致收敛准则；3)确界极限，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x \in D}|S_n(x) - S(x)| = 0$；4)点列极限，即 $\forall \{x_n\} \subset D$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n(x_n) - S(x_n)| = 0$；

5)**狄尼(Dini)定理** 设连续函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 收敛于 $S(x)$. 若

(i) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续；(ii) $\forall x \in [a,b]$(固定)，$\{S_n(x)\}$ 关于 n 单调，则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

对函数项级数来说，除了上述判别法之外，还经常用到如下判别法.

6)M-判别法(优级数判别法)；7)狄里克雷判别法，简称 D-法；8)阿贝尔判别法，简称 A-法.

需要说明的是：(a). 1)、3)~5)都要用到极限函数(或和函数)；(b). 1)~4)是判别一致收敛的充要条件，而 5)~8)是判别一致收敛的充分条件. 用 6)判别的不仅是一致收敛，而且是绝对一致收敛.

为了使用方便，我们将相应于函数项级数的狄尼定理引述如下：

5′) **函数项级数的狄尼定理**　设各项连续的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $S(x)$. 若

(i) $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续;(ii) $\forall x\in[a,b]$ (固定), $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 是非负级数或非正级数,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

3. 不一致收敛的判别法

判别不一致收敛常用的方法:

1)柯西准则. 以函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 为例即是: $\exists\varepsilon_0>0,\forall N\in\mathbf{N}_+,\exists n'>N,p'\in\mathbf{N}_+$ 及 $x'\in D$, 使得

$$|u_{n'+1}(x')+u_{n'+2}(x')+\cdots+u_{n'+p'}(x')|\geqslant\varepsilon_0;$$

2)子列极限,即 $\exists\{x_n\}\subset D$, 使 $\lim\limits_{n\to\infty}|S_n(x_n)-S(x_n)|\neq 0$;

3)连续性定理的逆命题,即若函数列 $\{S_n(x)\}$ $\left($或函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)$ 在 D 上各项连续,但极限函数(或和函数)不连续,则函数列 $\{S_n(x)\}$ $\left($或函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)$ 在 D 上不一致收敛;

4)通项法,即若 $u_n(x)\overset{D}{\not\to}0(n\to\infty)$,则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上不一致收敛.

4. 和函数的分析性质

和函数(或极限函数)的分析性质可用连续性定理、可积性定理及可微性定理加以讨论. 这些定理的条件都是充分的,但不是必要的! 另外,函数的连续和可微都是局部概念,因此可将连续性定理和可微性定理中的"在 D 上一致收敛"减弱为"在 D 上内闭一致收敛".

例 5.22　讨论下列函数列在指定区间上的一致收敛性.

(1) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$,

1) $0\leqslant x\leqslant b<1$;　　2) $0\leqslant x\leqslant 1$;　　3) $1<a\leqslant x<+\infty$.

(2) $f_n(x)=\sqrt{n}(1-x)\mathrm{e}^{-n(x-1)^2}$,　　$0<x<1$.

解　(1)　1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$,　　$x\in[0,b](b<1)$.

因为

$$\sup_{x\in[0,b]}|f_n(x)-f(x)|=\sup_{x\in[0,b]}\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|\leqslant b^n\to 0(n\to\infty),$$

所以 $f_n(x) \xrightarrow{[0,b]} f(x)(n \to \infty)$.

2)当 $0 \leqslant x < 1$ 时,$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$;当 $x = 1$ 时,$f_n(1) = \dfrac{1}{2}$,$f(1) = \dfrac{1}{2}$.

故

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上连续,而极限函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续,所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

3) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{1}{x}\right)^n} = 1, \quad x \in [a, +\infty), (a > 1)$.

因为

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,+\infty)} \left|\frac{1}{1+x^n}\right| = \frac{1}{1+a^n} \to 0 (n \to \infty),$$

所以 $f_n(x) \xrightarrow{[a, +\infty)} f(x) = 1 \quad (n \to \infty)$.

(2) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}(1-x)\mathrm{e}^{-n(x-1)^2} = 0, x \in (0,1)$.

而

$$\lim_{n\to\infty} \left| f_n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = \mathrm{e}^{-1} \neq 0,$$

所以 $\{f_n(x)\}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

例 5.23 讨论下面的函数列在指定区间上的一致收敛性.

$$S_n(x) = n\left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}\right), (\mathrm{i}) x \in (0, +\infty); (\mathrm{ii}) x \in [\delta, +\infty] (\delta > 0).$$

解 极限函数 $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x \in (0, +\infty)$.

(i)由于

$$\begin{aligned} \sup_{x\in(0,+\infty)} |S_n(x) - S(x)| &\geqslant S\left(\frac{1}{n}\right) - S_n\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)\sqrt{n} \to +\infty \quad (n \to \infty), \end{aligned}$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.

(ii)记

$$g_n(x) = S(x) - S_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \dfrac{1}{n}}}, \text{则}$$

$$g'_n(x) = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}}}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}\right)^2}\right]. \text{令 } g'_n(x) = 0 \text{ 可得驻点:} x_0 = \frac{1}{3n}.$$

对固定的 $\delta > 0$,当 n 充分大时,$x_0 \notin [\delta, +\infty)$. 注意到,当 $x > \dfrac{1}{3n}$ 时,$g'_n(x) < 0$,因此 $g_n(x)$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上的最大值在 $x = \delta$ 处达到,所以

$$\sup_{x\in(\delta,+\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} - \frac{1}{\sqrt{\delta}+\sqrt{\delta+\dfrac{1}{n}}} \to 0 (n \to \infty).$$

从而 $\{S_n(x)\}$ 在 $[\delta, +\infty)$ 上一致收敛于 $S(x)$.

例 5.24　证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$.

(1)在 $[\alpha,\pi]$ $(0 < \alpha < \pi)$ 上一致收敛;

(2)在 $[0,\pi]$ 上不一致收敛.

(河南大学).

证明　(1)记 $a_n(x) = \sin nx, b_n(x) = \dfrac{1}{n}$. 显然 $\{b_n(x)\}$ 单调递减(关于 n)一致地趋向于 0,而

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x - \cos\dfrac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\sin\dfrac{\alpha}{2}},$$

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和一致有界,故由 D-法知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n}$ 在 $[\alpha,\pi]$ 上一致收敛.

(2)用柯西准则.

取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{1}{2} > 0$, $\forall N > 0$,取 $n' = N \geqslant N, p' = N+2, x' = \dfrac{1}{2(N+1)} \in [0,\pi]$, 使得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n'+1}^{n'+p'} \frac{\sin kx'}{k}\right| &= \left|\sum_{k=N+1}^{2(N+1)} \frac{\sin kx'}{k}\right| \\ &= \frac{\sin\dfrac{N+1}{2(N+1)}}{N+1} + \frac{\sin\dfrac{N+2}{2(N+1)}}{N+2} + \cdots + \frac{\sin\dfrac{2(N+1)}{2(N+1)}}{2(N+1)} \\ &> \sin\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \cdots + \frac{1}{2(N+1)}\right)\end{aligned}$$

$$> \sin\frac{1}{2}\cdot\frac{N+1}{2(N+1)} = \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

由柯西准则知,原级数在 $[0,\pi]$ 上不一致收敛.

类题 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{2x}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致收敛.

提示 用柯西准则.

取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{5}>0$, $\forall N>0$,取 $n'>N$, $p'=n'$, $x'=n'$, 则有

$$\left|\arctan\frac{2x'}{(n'+1)^2+x'^2}+\arctan\frac{2x'}{(n'+2)^2+x'^2}+\cdots+\arctan\frac{2x'}{(n'+p')^2+x'^2}\right|$$

$$\geqslant n'\arctan\frac{2n'}{(n'+n')^2+n'^2}=n'\arctan\frac{2n'}{5n'^2}>\frac{1}{5}=\varepsilon_0.$$

这里用到了不等式: $\arctan\theta>\dfrac{\theta}{2}$, $\forall\theta\in(0,1)$.

例 5.25 讨论级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的一致收敛性.

解 由 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}x^2e^{-kx}=\dfrac{x^2(1-e^{-nx})}{1-e^{-x}}$, 可得和函数

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{x^2}{1-e^{-x}},\quad x\in(0,+\infty).$$

下面考察 $\sup\limits_{x>0}|S_n(x)-S(x)|=\sup\limits_{x>0}\left|\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}e^{-nx}\right|\to 0(n\to\infty)$?

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{1-e^{-x}}=0$,所以 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$,当 $x\in(0,\delta)$ 时,有

$$0<\frac{x^2}{1-e^{-x}}<\varepsilon.$$

于是, $\forall n\in\mathbf{N}_+$,当 $x\in(0,\delta)$ 时都有

$$0<\frac{x^2}{1-e^{-x}}e^{-nx}<\frac{x^2}{1-e^{-x}}<\varepsilon. \tag{1}$$

而当 $\delta\leqslant x<+\infty$ 时,注意到 $x<e^x$,对适当大的 n,有

$$0<\frac{x^2}{1-e^{-x}}e^{-nx}<\frac{e^{-(n-2)x}}{1-e^{-x}}<\frac{e^{-(n-2)\delta}}{1-e^{-\delta}}\to 0\quad(n\to\infty).$$

于是,对上述 $\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时, $\forall x\in[\delta,+\infty)$,都有

$$0<\frac{x^2}{1-e^{-x}}e^{-nx}<\varepsilon. \tag{2}$$

由式(1)、式(2)知，$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$，当 $n > N$ 时，$\forall x \in (0, +\infty)$ 有

$$\left| \frac{x^2}{1 - e^{-x}} e^{-nx} \right| < \varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} \left| \frac{x^2}{1 - e^{-x}} e^{-nx} \right| = 0,$$

故原级数在$(0, +\infty)$上一致收敛.

例 5.26　证明：(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n (1 - x)$ 在$[0,1]$ 上一致收敛；

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n (1 - x)$ 在$[0,1]$ 上收敛但不一致收敛.

证明　(1)对每一个固定 $x \in [0,1]$，$\{(1 - x)x^n\}$ 单调递减趋于0. 由莱布尼茨型级数的余项估计，有

$$|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| \leqslant x^n(1 - x).$$

下面求 $u_n(x) = x^n(1 - x)$ 在$[0,1]$ 上的最大值.

令 $u_n'(x) = (n + 1)x^{n-1}\left(\frac{n}{n+1} - x\right) = 0$，可得驻点 $x = \frac{n}{n+1}$. 由 $u_n(0) = 0$，$u_n(1) = 0$ 及 $u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$ 知，$u_n(x)$ 在$[0,1]$ 上的最大值为 $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$. 故

$$\sup_{x\in[0,1]} |S(x) - S_n(x)| \leqslant \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0 (n \to \infty),$$

从而原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

若用 D-法证明更为简单.

记 $a_n(x) = x^n(1 - x), b_n(x) = (-1)^n$. 对每一个固定的 $x \in [0,1]$，$\{a_n(x)\}$ 单调递减一致地趋向于0. 又 $\left| \sum_{k=0}^{n} b_k(x) \right| \leqslant 2$. 故由 D-法知，原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(2)因为 $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k(1 - x) = \begin{cases} 1 - x^n, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0,1, \end{cases}$

所以

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0,1. \end{cases}$$

由于和函数不连续，所以 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n(1 - x)$ 在$[0,1]$ 上收敛但不一致收敛.

注 5.4 这个例子告诉我们,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$[a,b]$上绝对并一致收敛. 推不出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在$[a,b]$上一致收敛.

例 5.27 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$ 在$[0,+\infty)$上一致收敛.

证明 记 $a_n(x)=a_n, b_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}dt$, 连续使用 n 次分部积分可得 $b_n(x)=1-\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$. 显然 $\{b_n(x)\}$ 单调递减(关于 n),且 $|b_n(x)|\leqslant 2$. 由 A-法知,原级数在$[0,+\infty)$上一致收敛.

例 5.28 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数$f'(x)$及$a<\beta<b$. 对于每一个自然数 $n>\frac{1}{b-\beta}$,定义函数列

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],\quad a\leqslant x\leqslant\beta.$$

试证:当 $n\to\infty$ 时,函数列$\{f_n(x)\}$在$[a,\beta]$上一致收敛于$f'(x)$(中科院).

证明 由$f'(x)$在$[a,\beta]$上连续知,$f'(x)$在$[a,\beta]$上一致连续. 故 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0, \forall x_1,x_2\in[a,\beta]$,只要$|x_1-x_2|<\delta$, 就有

$$|f'(x_1)-f'(x_2)|<\varepsilon.$$

由微分中值定理, $\forall x\in[a,\beta]$, $\exists\xi_n\in(a,\beta)$, 使

$$f'(\xi_n)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f_n(x).$$

于是,若令 $N=\frac{1}{\delta}$,则当 $n>\max\left\{N,\frac{1}{b-\beta}\right\}$时, $\forall x\in[a,\beta]$,有

$$|f_n(x)-f'(x)|=|f'(\xi_n)-f'(x)|<\varepsilon.$$

即 $f_n(x)\xrightarrow{[a,\beta]}f'(x)(n\to\infty)$.

类题 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有连续的导函数$f'(x)$,

$f_n(x)=e^n[f(x+e^{-n})-f(x)](n=1,2,\cdots)$.

证明:$\{f_n(x)\}$在任一有限开区间(a,b)内一致收敛于$f'(x)$(福建师大).

例 5.29 证明函数列的狄尼定理.

证明 用有限覆盖定理.

不妨设$\{S_n(x)\}$关于n单调递减. 令

$$g_n(x)=S_n(x)-S(x),$$

则$\{g_n(x)\}$非负关于n也单调递减,且$g_n(x)\to 0(n\to\infty)$. 由此知,设$x_0\in[a,$

$b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(x_0) \xlongequal{\triangle} N(\varepsilon, x_0) > 0$, 当 $n \geqslant N(x_0)$ 时,有 $0 \leqslant g_n(x_0) < \varepsilon$.

由 $g_{N(x_0)}(x)$ 的连续性知,存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$,当 $x \in U(x_0) \cap [a,b]$ 时,有

$$0 \leqslant g_{N(x_0)}(x) < \varepsilon.$$

这样,开区间集 $\{U(x_0) \mid x_0 \in [a,b]\}$ 就构成了 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 由有限覆盖定理,存在有限个开区间 $U(x_1), U(x_2), \cdots, U(x_k)$ 将 $[a,b]$ 覆盖,即 $\bigcup_{i=1}^{k} U(x_i) \supset [a,b]$. 而每一个开区间 $U(x_i)$ 都对应了一个 $N(x_i)$,令

$$N = \max\{N(x_i) \mid i = 1,2,\cdots,k\}.$$

于是,当 $n > N$ 时, $\forall x \in [a,b]$ (必存在某一个开区间 $U(x_i)$,使 $x \in U(x_i)$),有

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant g_{N(x_i)}(x) < \varepsilon,$$

即 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$.

注 5.5　狄尼定理也可用反证法,结合致密性定理来证明它(参见参考文献[2](下册)). 狄尼定理给出了一个判断一致收敛的充分条件,用它可方便、快捷地做一类题目. 例如:

(1) $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $x \in [a,b]$;

(2) $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, $x \in [1,a]$;

(3) $f_n(x) = x\arctan nx$, $x \in [a,b]\ (a > 0)$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, $x \in [0,1]$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, $x \in [0,1]$ (和例 5.25 作比较).

例 5.30　在区间 $[0,1]$ 上,

(1)证明:函数列 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ $(n = 1,2,\cdots)$ 一致收敛;

(2)证明:函数列 $f_n(x) = \dfrac{1}{e^{\frac{x}{n}} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 一致收敛;

(3)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \dfrac{dx}{e^{\frac{x}{n}} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$

(武汉大学).

证明　(1)由狄尼定理可知, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{[0,1]} e^x\ (n \to \infty)$.

也可采用如下的证法:

由 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < e^x < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1}$, $x \in [0,1]$, $\forall n$,可得

$$0 < e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \frac{x}{n}$$

$$< e^x \cdot \frac{x}{n} \leqslant \frac{e}{n} \to 0 (n \to \infty),$$

故 $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ 在[0,1]上一致收敛于 e^x.

(2)极限函数 $f(x) = \frac{1}{1 + e^x}$. 因为

$$\left| \frac{1}{e^{\frac{x}{n}} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} - \frac{1}{1 + e^x} \right| = \left| \frac{(e^{\frac{x}{n}} - 1) + \left[\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n - e^x\right]}{(1 + e^x)\left[e^{\frac{x}{n}} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right]} \right|$$

$$\leqslant \left| e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right| + |e^{\frac{x}{n}} - 1|$$

$$\leqslant \frac{e}{n} + (e^{\frac{1}{n}} - 1) \to 0 \quad (0 \to \infty),$$

所以 $f_n(x) \xrightrightarrows{[0,1]} \frac{1}{1 + e^x}$ $(n \to \infty)$.

(3)由(2)知,可积性定理的条件成立. 极限运算与积分运算可交换顺序,故

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{dx}{e^{\frac{x}{n}} + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$$

$$= -\ln(1 + e^{-x})\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right).$$

例 5.31 证明:(1) $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$;

(2) $\int_0^1 x^n \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n dx = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

(解放军信息工程大学).

证明 (1) $x^{-x} = e^{-x\ln x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$.

因为 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$,所以 $x\ln x$ 在[0,1]上连续,并且有界,设界为 M. 若记 $u_n(x) = \frac{(-x\ln x)^n}{n!}$,则

$$|u_n(x)| \leqslant \frac{M^n}{n!}, \forall x \in [0,1].$$

注意到 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}$ 收敛,利用优级数判别法可知,$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛.

由逐项积分定理,有

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 x^n(\ln x)^n\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (\ln x)^n\mathrm{d}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!(n+1)}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{(n-2)!(n+1)^2}\int_0^1 x^n(\ln x)^{n-2}\mathrm{d}x\\ &= \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{0!(n+1)^n}\int_0^1 x^n\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}.\end{aligned}$$

(2). (2)的证明包含在(1)的证明之中.

例 5.32　设 $u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛. 证明:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明　(1)用柯西准则. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbf{N}_+$ 及 $x\in(a,b)$,有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

令 $x\to a^+$,可得

$$|u_{n+1}(a)+u_{n+2}(a)+\cdots+u_{n+p}(a)|\leqslant\varepsilon.$$

由数项级数的柯西准则知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(a)$ 收敛.

同理可证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(b)$ 收敛.

(2)由(1)的证明过程知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $n>N$ 时, $\forall p\in\mathbf{N}_+$ 及 $x\in[a,b]$,有

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|\leqslant\varepsilon.$$

由函数项级数的柯西准则, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

相应地,我们有下面的结论,它为判断不一致收敛提供了另一种方法.

命题 5.2 设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a,b) 内收敛，$u_n(x)$ 在 $x=b$ 左连续，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(b)$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(b-\delta,b)(\delta>0)$ 内必不一致收敛.

这个命题不难用反证法予以证明.

类题 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $x>1$ 上不一致收敛.

事实上，假设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 在 $x>1$ 上一致收敛，由例 5.32 可推出 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛. 矛盾.

例 5.33 设对每一个 n，$f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且当 $n\to\infty$ 时，$\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$. 证明：

(1) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} f_n(x) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = \left(\sup\limits_{x\in[a,b]} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$(华东师大).

证明 (1) 设 $|f_n(x)|\leqslant M_n$，$\forall x\in[a,b]$，由 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$ 可知，$\exists N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，对 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f_n(x)-f(x)|<1$.

对固定的 N，有 $|f_N(x)-f(x)|<1$，即 $|f(x)|<|f_N(x)|+1\leqslant M_N+1$，$\forall x\in[a,b]$. 这表明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(2) 因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，$\forall x\in[a,b]$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，即

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon.$$

由于 $f_n(x)$ 和 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，所以 $\sup\limits_{x\in[a,b]} f_n(x)$，$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ 均有限，对上式两边取上确界有

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)-\varepsilon\leqslant \sup_{x\in[a,b]} f_n(x)\leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x)+\varepsilon,$$

或

$$\left|\sup_{x\in[a,b]} f_n(x)-\sup_{x\in[a,b]} f(x)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{1}$$

综上可知，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有式(1) 成立，即有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} f_n(x) = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

例 5.34 证明：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\ln x$ 在 $(0,1)$ 内不一致收敛，但在 $[0,1]$ 上可逐项积分.

证明 由于 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{2n}\ln x=0$，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}\ln x$ 在 $[0,1]$ 上收敛. 设其和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{x^2}{1-x^2}\ln x, & 0<x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

由洛必达法则,易知 $S(1-0)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2}{1-x^2}\ln x=-\dfrac{1}{2}\neq0=S(1)$,即 $S(x)$ 在 $[0,1]$ 上不连续. 由连续性定理, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

为了证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{2n}\ln x$ 在 $[0,1]$ 上可逐项可积,只需证明其余项

$$r_n(x)=\sum_{k=n+1}^{\infty}x^{2k}\ln x=\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\ln x$$

的积分

$$\int_0^1 r_n(x)\,\mathrm{d}x\to0\quad(n\to\infty)$$

即可.

因为

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x^2}{1-x^2}\ln x=0,\qquad\lim_{x\to1-0}\frac{x^2}{1-x^2}\ln x=-\frac{1}{2},$$

所以,令

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{x^2}{1-x^2}\ln x, & 0<x<1,\\ -\dfrac{1}{2}, & x=1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,所以存在 $M>0$,使得 $|f(x)|\leqslant M$, $x\in[0,1]$. 于是,有

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 r_n(x)\,\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_0^1|r_n(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1|f(x)|\,x^{2n}\mathrm{d}x\\ &\leqslant M\int_0^1x^{2n}\mathrm{d}x=\frac{M}{2n+1}\to0\quad(n\to\infty).\end{aligned}$$

例 5.35　设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$, $x\in(0,+\infty)$.

(1)证明此级数在 $(0,+\infty)$ 上收敛但不一致收敛;

(2)求其和函数.

证明　(1)对每一个固定的 $x>0$,有

$$n\mathrm{e}^{-nx}=\frac{n}{\mathrm{e}^{nx}}<\frac{6}{x^3}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

利用正项级数的比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$上收敛.

但由于 $\sup\limits_{x\in(0,+\infty)} |u_n(x)| \geqslant u_n\left(\frac{1}{n}\right) = ne^{-1} \not\to 0 (n\to\infty)$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$上不一致收敛.

注：亦可用命题5.2说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$上不一致收敛.

(2)设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, x \in (0, +\infty)$.

由于级数的通项 $ne^{-nx} = (-e^{-nx})'$，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx})$ 是以 e^{-x} 为公比的几何级数，其和可以求出. 因此，如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx})$ 在$(0, +\infty)$上满足逐项求导定理的条件，那么 $S(x)$ 便可求出. 但由(1)知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$(0, +\infty)$上不一致收敛，也就是说 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx})$ 在$(0, +\infty)$上不满足逐项求导定理的条件. 为了克服这一困难，我们在缩小的区间$[\delta, \infty)$上考虑上述问题.

$\forall x_0 \in (0, +\infty), \exists \delta > 0$，使 $x_0 \in [\delta, +\infty)$，记 $v_n(x) = -e^{-nx}$，显然 $v_n(x)$ 在$[\delta, +\infty)$上有连续的导数. 由

$$ne^{-nx} \leqslant ne^{-n\delta} < \frac{6}{\delta^3}\cdot\frac{1}{n^2}, \quad x \in [\delta, +\infty)$$

知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v'_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在$[\delta, +\infty)$上一致收敛. 因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-e^{-nx})$ 在$[\delta, +\infty)$上可逐项求导，于是可得

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-nx})\right)'$$

$$= \left(-\frac{1}{1-e^{-x}}\right)' = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}, \quad x \in [\delta, +\infty).$$

特别地，$S(x_0) = \frac{e^{x_0}}{(e^{x_0}-1)^2}$. 由 x_0 的任意性，$\forall x \in (0, +\infty)$，都有

$$S(x) = \frac{e^x}{(e^x-1)^2}.$$

类题 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}, \quad x \in (0, +\infty)$.

(1)证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在$(0, +\infty)$上收敛，但不一致收敛；

(2)求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的和函数.

提示　和函数 $S(x)=\dfrac{e^{2x}+1}{(e^x-1)^3}$(注意应用例 5.35 的结果).

例 5.36　在[0,1]上定义的函数列

$$u_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{1}{n},\\ \\ 0, & x\neq\dfrac{1}{n},\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots.$$

证明:函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛,但它不存在优级数(河南大学).

证明　因为

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{n+1}, & x=\dfrac{1}{n+1},\\ \dfrac{1}{n+2}, & x=\dfrac{1}{n+2},\\ \vdots & \\ \dfrac{1}{n+p}, & x=\dfrac{1}{n+p},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

所以当 $x\in[0,1]$ 时,$\forall n,p\in\mathbf{N}_+$,恒有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right|<\frac{1}{n}.$$

于是,$\forall\varepsilon>0$,取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,当 $n>N$ 时,$\forall p\in\mathbf{N}_+$ 及 $x\in[0,1]$,总有

$$\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}(x)\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

由柯西准则知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[0,1]上一致收敛.

假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在[0,1]上存在优级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. 取 $x=\dfrac{1}{n}$,则

$$M_n\geqslant|u_n(x)|=\left|u_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{n}>0.$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ 收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 收敛,这与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散相矛盾. 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 不存在优级数.

注 5.6　这个例子告诉我们,绝对并一致收敛的函数项级数的一致收敛性并

不一定总能用优级数判别法来判定. 这是因为优级数判别法是判定一致收敛的充分条件,而非必要条件!

例 5.37 设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛,且 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界,则 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证明 由于 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上收敛,所以对每一个 $x_0 \in [a,b]$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(x_0) = N(x_0,\varepsilon) > 0$,当 $m,n > N$ 时,有

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $\{f'_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致有界知, $\exists M > 0$,与 n,x 无关,使得

$$|f'_n(x)| \leqslant M.$$

取 $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M} > 0$,当 $x \in U(x_0,\delta)$ 时,有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &\leqslant |[f_n(x) - f_m(x)] - [f_n(x_0) - f_m(x_0)]| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &= |f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad (\xi \in U(x_0,\delta)). \end{aligned}$$

让 x 跑遍 $[a,b]$,得到一个开区间集 $H = \{U(x) \mid x \in [a,b]\}$,它将闭区间 $[a,b]$ 覆盖. 由有限覆盖定理,存在 H 中的有限个开区间 $U(x_1), U(x_2), \cdots, U(x_k)$ 将 $[a,b]$ 覆盖. 取 $N = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} \{N(x_i)\} > 0$,当 $m,n > N$ 时, $\forall x \in [a,b]$, 有

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

由柯西准则知, $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

相应于函数项级数情形,有下面的结论.

例 5.37′ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, $u_n(x)$ 有连续导数,且 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} u'_k(x)\right| \leqslant M$, $\forall x \in [a,b]$ 及 $\forall n \in \mathbf{N}_+$ 成立,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例 5.38 设 $u_n(x)$ 是 $[a,b]$ 上非负连续函数, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛于 $u(x)$. 证明: $u(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定达到最小值(复旦大学).

证明 记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$,则 $S_n(x)$ 递增趋向于 $u(x)$,且 $u(x) \geqslant 0$.

设 $\inf\limits_{x \in [a,b]} u(x) = A$, 则存在点列 $\{x_k\} \subset [a,b]$,使 $\lim\limits_{k \to \infty} u(x_k) = A$. 由致密性定理知, $\{x_k\}$ 存在收敛子列,仍记为 $\{x_k\}$,不妨设 $x_k \to x_0 (k \to \infty)$ 且 $x_0 \in [a,b]$.

下证: $u(x_0) = A$.

若不然,则 $\exists \varepsilon_0 > 0$,使 $u(x_0) > A + \varepsilon_0$. 由 $S_n(x_0) \to u(x_0) (n \to \infty)$ 知,

$\exists N>0$,使 $S_N(x_0)>A+\frac{2}{3}\varepsilon_0$.

由 $S_N(x)$ 在点 x_0 处的连续性知, $\exists\delta>0$,当 $x\in U(x_0,\delta)$ 时,有

$$S_N(x)>A+\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

由于 $S_n(x)$ 递增,故更有 $u(x)>A+\frac{\varepsilon_0}{3}$(当 $x\in U(x_0,\delta)$). 于是存在适当大的 k,使 $|x_k-x_0|<\delta$,这样便有

$$u(x_k)>A+\frac{\varepsilon_0}{3}.$$

这与 $u(x_k)\to A(k\to\infty)$ 相矛盾.

类题　设 $\{f_n(x)\}(n=1,2,\cdots)$ 在 $[0,1]$ 上连续,并且 $f_n(x)\geqslant f_{n+1}(x)$, $\forall x\in[0,1]$ 及 $n=1,2,\cdots$. 试证明:若 $\{f_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $f(x)$,则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上达到最大值(北大).

例 5.39　设一元函数 f 在 $x=0$ 的邻域内有二阶连续导数, $f(0)=0$, $0<f'(0)<1$. 函数 f_n 是 f 的 n 次复合. 试证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内一致收敛(中科大).

证明　由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有二阶连续导数,所以当 $\delta_1>0$ 适当小时, $\exists M>0$,使 $|f''(x)|\leqslant M$, $\forall x\in[-\delta_1,\delta_1]$.

由泰勒公式,有

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\\&=\left(f'(0)+\frac{1}{2}f''(\xi)x\right)x\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}).\end{aligned}$$

于是

$$|f(x)|\leqslant\left(f'(0)+\frac{1}{2}M\delta_1\right)|x|.$$

取 δ_1 充分小,使 $0<f'(0)+\frac{1}{2}M\delta_1<1$, 则上式变为

$$|f(x)|\leqslant\left(f'(0)+\frac{1}{2}M\delta_1\right)|x|\overset{\triangle}{=\!=}\alpha|x|,\quad x\in[-\delta,\delta](0<\delta<\delta_1),$$

其中 $0<\alpha<1$.

重复使用上面的不等式,可得

$$\begin{aligned}|f_2(x)|&=|f(f(x))|\leqslant\alpha|f(x)|\leqslant\alpha^2|x|,\\|f_n(x)|&\leqslant\alpha|f_{n-1}(x)|\leqslant\cdots\leqslant\alpha^n|x|\leqslant\alpha^n\delta.\end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\delta$ 收敛,由优级数判别法知, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在$[-\delta,\delta]$ 上一致收敛.

类题 若函数$f(x)$ 在$[-a,a](a>0)$ 上连续,且 $\forall x\in[-a,a],x\neq 0$,有 $|f(x)|<|x|$. 设$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f(f_1(x)),\cdots,f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),\cdots$,则 $\{f_n(x)\}$ 在$[-a,a]$ 上一致收敛于零(南京大学;吉林大学).

提示 利用$f(x)$ 的连续性及 $|f(x)|<|x|$ 可推出 $|f(x)|\leqslant|x|,x\in[-a,a]$. $\forall\varepsilon>0$,由于 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|$在$[-a,-\varepsilon]\cup[\varepsilon,a]$ 上的最大值 $M(<1)$,所以有

$$|f(x)|\leqslant M|x|\leqslant Ma,$$

递推可知,

$$|f_n(x)|\leqslant M^n a.$$

而在 $[-\varepsilon,\varepsilon]$ 上,$|f_n(x)|\leqslant|x|\leqslant\varepsilon$. 综上知, $\{f_n(x)\}$ 在$[-a,a]$ 上一致收敛于0.

例 5.40 设$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$.

(1)证明:$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上可导,且一致连续;

(2)证明:反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证明 (1)记 $u_n(x)=\frac{1}{2^n+x}$,则 $u_n(x)$ 显然在$[0,+\infty)$ 上有连续的导数.

由 $0\leqslant u_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n},\forall x\in[0,+\infty)$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的收敛性,利用正项级数的比较判别法可知, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上点态收敛.

又由 $|u'_n(x)|=\left|\frac{-1}{(2^n+x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{4^n},\forall x\in[0,+\infty)$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}$ 的收敛性,利用 M 判别法可知, $\sum_{n=0}^{\infty}u'_n(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致收敛. 因此,由逐项可微定理知, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$在$[0,+\infty)$ 上可导.

下证:$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续.

事实上, $\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$. 由

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|$$

$$\leqslant|x_1-x_2|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}|x_1-x_2|$$

可知,$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上一致连续.

(2) $\forall A > 0$, 考察

$$\int_0^A f(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + x}\right)\mathrm{d}x > \sum_{k=0}^{n} \int_0^A \frac{\mathrm{d}x}{2^k + x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{A}{2^k}\right) \to +\infty \ (A \to +\infty),$$

所以 $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_0^A f(x)\mathrm{d}x = +\infty$, 从而反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

例 5.41　若函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 满足下列条件:

(1) $\varphi_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 上非负连续, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1$;

(2) $\forall c \in (0,1)$, $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[-1,-c] \cup [c,1]$ 上一致收敛于 0,

则对任一在 $[-1,1]$ 上连续的函数 $g(x)$, 都有

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = g(0).$$

证明　由条件(2)知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbf{N}_+$, 当 $n > N$ 时, $\forall x \in [-1,-c] \cup [c,1]$, 有 $|\varphi_n(x)| < \varepsilon$. 故有

$$\left|\int_{-1}^{-c} \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon(1-c), \quad \left|\int_{c}^{1} \varphi_n(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon(1-c).$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\int_{-1}^{-c} + \int_{-c}^{c} + \int_{c}^{1}\right] = \lim_{n\to\infty} \int_{-c}^{c} \varphi_n(x)\mathrm{d}x = 1.$$

由于 $g(x)$ 在 $[-c,c] \subset [-1,1]$ 上连续, 所以它存在最大值 $M(c)$ 和最小值 $m(c)$, 即 $m(c) \leqslant g(x) \leqslant M(c)$, $x \in [-c,c]$.

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-c}^{c} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= g(\xi) \cdot \lim_{n\to\infty} \int_{-c}^{c} \varphi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= g(\xi), \xi \in [-c,c] \quad \text{(这里用到了第一积分中值定理)}.$$

由此知,

$$m(c) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \leqslant M(c).$$

令 $c \to 0^+$, 由上式及 g 的连续性, 有

$$g(0) \leqslant \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x \leqslant g(0),$$

即

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} g(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x = g(0).$$

例 5.42　若 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且 $\forall x \in [a,b]$, 数列 $\{f_n(x)\}$

都有界. 试证明:存在闭区间 $[c,d]\subset[a,b]$,使 $\{f_n(x)\}$ 在 $[c,d]$ 上一致有界(北大;云大).

证明 用反证法. 假设 $\{f_n(x)\}$ 在任意闭区间 $[p,q]\subset[a,b]$ 上都非一致有界,即

$$\forall k>0,\exists n_0\in\mathbf{N}_+,\exists x_0\in[p,q],\text{使}|f_{n_0}(x_0)|>k.$$

因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上非一致有界,所以对 $k=1,\exists n_1\in\mathbf{N}_+,\exists x_1\in[a,b]$ 使 $|f_{n_1}(x_1)|>1$. 由连续函数的保号性, $\exists[a_1,b_1]\subset[a,b]$, 使得 $\forall x\in[a_1,b_1]$, 有

$$|f_{n_1}(x)|>1\text{ 且 }b_1-a_1\leqslant\frac{b-a}{2}.$$

又因为 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a_1,b_1]$ 上非一致有界,所以对 $k=2,\exists n_2\in\mathbf{N}_+$ 且 $n_2>n_1,\exists x_2\in[a_1,b_1]$,使 $|f_{n_2}(x_2)|>2$. 由连续函数的保号性, $\exists[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, 使得 $\forall x\in[a_2,b_2]$, 有

$$|f_{n_2}(x)|>2\text{ 且 }b_2-a_2\leqslant\frac{b-a}{2^2}$$

如此下去,可得一个闭区间列 $\{[a_k,b_k]\}$, 满足

$$[a_k,b_k]\supset[a_{k+1},b_{k+1}],\quad b_k-a_k\leqslant\frac{b-a}{2^k},$$

且 $\forall k\in\mathbf{N}_+,\forall x\in[a_k,b_k]$,有 $|f_{n_k}(x)|>k$,其中 $n_{k+1}>n_k$.

由闭区间套定理, $\exists\xi\in[a_k,b_k](k=1,2,\cdots)$, 使

$$|f_{n_k}(\xi)|>k,$$

即数列 $\{f_n(\xi)\}$ 的某一个子列 $\{f_{n_k}(\xi)\}$ 无界,则数列 $\{f_n(\xi)\}$ 无界. 这与已知条件矛盾.

下面的例子有一定难度,有兴趣的同学可钻研一下,学习它的证明方法.

例 5.43 设 $\{a_n\}$ 是递减的正数列. 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx \tag{1}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛的充要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$ (复旦).

证明 ($\Rightarrow$)设级数(1)在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛,由柯西准则知, $\forall\varepsilon>0$, $\exists N>0$,当 $m>n>N$ 时, $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\left|\sum_{k=n}^{m}a_k\sin kx\right|<\varepsilon.$$

取 $m>2N,n=\left[\frac{m}{2}+1\right]$,则 $n\leqslant\frac{m}{2}+1<n+1$,即 $n>\frac{m}{2}>N$. 再取 $x=\frac{\pi}{2m}$, 于是有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k \sin k\frac{\pi}{2m}\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

当 $n \leqslant k \leqslant m$ 时，$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}\cdot\frac{n}{m} \leqslant k\frac{\pi}{2m} \leqslant \frac{\pi}{2}$，所以

$$\sin k\cdot\frac{\pi}{2m} \geqslant \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由式(2)得

$$\varepsilon > \sum_{k=n}^{m} a_k \sin k\frac{\pi}{2m} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k=n}^{m} a_k$$

$$\geqslant (m-n+1)a_m\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4}ma_m.$$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

($\Leftarrow$)设 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$. 令

$$\mu_n = \sup_{m\geqslant n}\{ma_m\},$$

则 $\{\mu_n\}$ 递减趋于0. 对于 $m \geqslant n$，记

$$S_{n,m}(x) = \sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx.$$

下面将证明：对 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$，成立

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant (\pi+3)\mu_n. \tag{3}$$

由于 $S_{n,m}(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数，所以只需证明式(3)在 $[0,\pi]$ 上成立即可. 把区间 $[0,\pi]$ 分成 $\left[0,\frac{\pi}{m}\right], \left[\frac{\pi}{m},\frac{\pi}{n}\right], \left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$ 三段，将证明式(3)在这三段上都成立.

1) $x \in \left[\frac{\pi}{n},\pi\right]$. 由不等式 $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$，有

$$\left|\sum_{k=n}^{m} \sin kx\right| = \frac{\left|\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x - \cos\left(m+\frac{1}{2}\right)x\right|}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant n.$$

由阿贝尔变换可得

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant n(a_n + 2a_m) \leqslant 3na_n \leqslant 3\mu_n.$$

2) $x \in \left[0,\frac{\pi}{m}\right]$. 由 $\sin\theta \leqslant \theta$ 可得

$$|S_{n,m}(x)| = \sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx \leqslant x\sum_{k=n}^{m} ka_k \leqslant x\sum_{k=n}^{m}\mu_k$$

$$= \frac{\pi}{m}(m-n+1)\mu_n \leqslant \pi\mu_n.$$

3) $x \in \left[\frac{\pi}{m}, \frac{\pi}{n}\right]$. 这时, $n \leqslant \frac{\pi}{x} \leqslant m$, 记 $l = \left[\frac{\pi}{x}\right]$. 于是

$$S_{n,m}(x) = \sum_{k=n}^{m} a_k \sin kx = \sum_{k=n}^{l} a_k \sin kx + \sum_{k=l+1}^{m} a_k \sin kx$$

$$= S_{n,l}(x) + S_{l+1,m}(x).$$

由 $l \leqslant \frac{\pi}{x} < l+1$, 可得 $x \leqslant \frac{\pi}{l}$, 故由 2) 知,

$$|S_{n,l}(x)| \leqslant \pi\mu_n.$$

因为 $\frac{\pi}{l+1} < x \leqslant \frac{\pi}{n}$, 且 $l+1 > \frac{\pi}{x} \geqslant n$, 由 1) 和 $\{\mu_n\}$ 的递减性, 即得

$$|S_{l+1,m}(x)| \leqslant 3\mu_{l+1} \leqslant 3\mu_n.$$

于是

$$|S_{n,m}(x)| \leqslant |S_{n,l}(x)| + |S_{l+1,m}(x)| \leqslant (\pi+3)\mu_n.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n = 0$, 即知(1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

三、幂级数

形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数称为幂级数, 其中 x_0 是一定点, a_n 称为幂级数的系数. 当 $x_0 = 0$ 时, 幂级数变成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 这种简单形式是我们着重要讨论的. 这是因为对一般形式的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 只要令 $y = x - x_0$ 就化成了上述简单形式.

幂级数是特殊的函数项级数, 关于函数项级数的一切结论, 对它都成立. 同时, 它又可以看成是多项式的推广, 因此在收敛性和和函数的性质方面有许多优良的性质. 正因为这一点, 它有着广泛的应用.

1. 幂级数的收敛半径和收敛域

柯西-阿达玛(Cauchy-Hadamard)公式. 令

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

则收敛半径

$$R=\begin{cases}0, & \text{当}\rho=+\infty\text{ 时},\\ \dfrac{1}{\rho}, & \text{当}0<\rho<+\infty\text{ 时},\\ +\infty, & \text{当}\rho=0\text{ 时}.\end{cases}$$

这个公式完全解决了收敛半径的计算. 但若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 存在,记为 ρ,则收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}$. 在许多情形下,用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 来计算 ρ 可能更方便! 比如,a_n 含有 $n!$ 等. 对这种情形,斯特林公式:

$$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}\quad(n\to\infty)$$

我们也经常会用到.

幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 内部处处绝对收敛(阿贝尔第一定理)并且是内闭一致收敛(阿贝尔第二定理),至于端点 $x=\pm R$ 处的收敛性要单独讨论. 收敛区间的端点是幂级数收敛点与发散点的分界点. 一般而言,幂级数在这分界点上,若收敛,则收敛的速度很慢;若发散,则发散的速度也很慢. 因此,讨论端点的敛散性往往是非常困难的,这要用到数项级数中更加精细的判别法(比如,拉贝判别法,高斯判别法等). 至于端点更深入的讨论是下面的定理.

陶贝尔(Tauber)定理　设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x)$ 在 $(-1,1)$ 上成立. 如果 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$,则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n=S$.

后面我们将给出这个定理的证明.

对“缺项”的幂级数其收敛半径的求法,一般是直接利用根式判别法或比式判别法. 例如,

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|\Big/\left|\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^2}{2n+3}=0<1$,所以收敛半径 $R=+\infty$.

2) $\sum\limits_{m=0}^{\infty}2^nx^{2n}$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n|x|^{2n}}=2|x|^2<1$,所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. 幂级数的分析性质

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，幂级数的收敛半径为 R，则

(1) $S(x)$ 在 $(-R,R)$ 内连续. 如果幂级数在区间端点收敛，则 $S(x)$ 在该端点单侧连续.

(2)幂级数在 $(-R,R)$ 内可逐项求积分，即

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

(3)幂级数在 $(-R,R)$ 内可逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

幂级数通过逐项求积、逐项求导后所得到的新的幂级数其收敛半径仍是 R，但在端点 $x=\pm R$ 处的收敛性可能会改变.

3. 函数的幂级数展开

对函数 $f(x)$，若在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内，成立

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处能展开为幂级数.

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 无穷次可微，则称幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

为 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数. 当 $x_0=0$ 时，上面的泰勒级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，称它为 $f(x)$ 的麦克劳林(Maclaurin)级数.

下面的命题给出了 $f(x)$ 在点 x_0 的幂级数与 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数之间的关系.

命题 5.3 (幂级数展开的唯一性定理)如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内能展开为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$，则这个幂级数展开式是唯一的，并且它就是 $f(x)$ 在点 x_0 的泰勒级数，即 $a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

值得注意的是：只要 $f(x)$ 在点 x_0 无穷次可微，那么 $f(x)$ 在点 x_0 就可以展开为泰勒级数，但是这个泰勒级数未必收敛(考察 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2^nx)}{n!}$ 在点 $x_0=0$ 的展开式)，即使收敛也未必收敛于 $f(x)$(考察 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 的

展开式).

$f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内的泰勒级数收敛于 $f(x)$ 本身的充要条件是余项 $\gamma_n(x)$ 在 $U(x_0)$ 内一致地趋于0.

一个方便实用的充分条件是下面的命题.

命题 5.4　若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内的各阶导数一致有界,即 $\exists M > 0$,使 $|f^{(n)}(x)| \leqslant M, \forall n, \forall x \in U(x_0)$ 成立,则 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

函数的幂级数展开分为直接法和间接法两种. 直接法需要求函数 $f(x)$ 在展开点的高阶导数值和证明其余项在展开点附近一致地趋于零——这往往是困难的! 间接法需要利用如下基本的展开式:

(1) $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}, x \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty, +\infty)$;

(3) $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}, x \in (-\infty, +\infty)$;

(4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}, x \in (-1, 1]$;

(5) $(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \alpha \neq 0, 1, 2, \cdots, k, \cdots$.

该展开式成立的范围当 $\alpha \leqslant -1$ 时,$x \in (-1, 1)$;当 $-1 < \alpha < 0$ 时,$x \in (-1, 1]$;当 $\alpha > 0$ 时,$x \in [-1, 1]$.

需要特别说明的是:间接法的理论依据是幂级数展开式的唯一性定理. 因此,在作展开时,我们可放心地使用逐项求导、逐项求积以及四则运算等方法,只要所得的幂级数具有正的收敛半径即可.

例 5.44　求下列幂级数的收敛域

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right) x^n$;　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{3^{\sqrt{n}}}$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} x^n$;　　(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1 + 2\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)^n x^n$.

解　(1) 记 $a_n = (-1)^n \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$. 因为

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(n+1)}\right]=1,$$

所以收敛半径 $R=1$.

或利用不等式

$$\ln(n+1) < |a_n| < 1+\ln n$$

及 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\ln n}=1$, 亦可知收敛半径 $R=1$.

当 $x=\pm 1$ 时,级数的通项均不趋于零,故级数的收敛域为 $(-1,1)$.

(2)记 $a_n=\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{\sqrt{n}}}{3^{\sqrt{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}3^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}3^{-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}=1,$$

或

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}}=1,$$

所以收敛半径 $R=1$.

当 $x=1$ 时,级数变成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\sqrt{n}}}$,因为当 n 适当大时,成立

$$\frac{1}{3^{\sqrt{n}}}\leqslant\frac{1}{3^{\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln 3}}.$$

而 $\ln 3>1$,所以由比较判别法知,原级数在 $x=1$ 处收敛;

当 $x=-1$ 时,级数变成 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^{\sqrt{n}}}$. 因为

$$\left|\frac{(-1)^n}{3^{\sqrt{n}}}\right|\leqslant\frac{1}{3^{\sqrt{n}}},$$

由上知,原级数在 $x=-1$ 处也收敛,故原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

说明:该级数在端点 $x=\pm 1$ 处的收敛性也可用对数判别法论证之.

(3)记 $a_n=\dfrac{n^n}{n!}$. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right]=\mathrm{e},$$

或利用斯特林公式:$n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}(n\to\infty)$,有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\sqrt[2n]{2n\pi}}=\mathrm{e},$$

所以收敛半径 $R=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

当 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$ 为正项级数. 由斯特林公式,

$$\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}\sim\frac{n^n}{\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-n}}\cdot\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\ (n\to\infty),$$

由此可知,原级数在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处发散;

当 $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时,级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}$ 为交错级数. 由

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{-(n+1)}\Big/\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$$

及

$$\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}\sim\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}\to 0\ (n\to\infty)$$

可知,原级数在 $x=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处收敛,故原级数的收敛域为 $\left[-\frac{1}{\mathrm{e}},\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

(4)记 $a_n=\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n$. 因为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\left|\left(1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right)^n\right|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|1+2\cos\frac{n\pi}{4}\right|=3,$$

所以收敛半径 $R=\frac{1}{3}$.

当 $x=\frac{1}{3}$ 时,级数变为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+2\cos\frac{n\pi}{4}}{3}\right)^n$. 对该级数的通项,考虑其子列 $\{a_{8k}\}=\{1\}$,不趋向于零,故原级数在 $x=\frac{1}{3}$ 处发散;

当 $x=-\frac{1}{3}$ 时,由类似地讨论可知,原级数在 $x=-\frac{1}{3}$ 处也发散. 从而原级数的收敛域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

例 5.45　求下列级数的收敛域.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+k^n}{n^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$,$k>1$ 为整数;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{x^n}$;　　(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n!}$.

解　(1)记 $a_n=\frac{1^n+2^n+\cdots+k^n}{n^2}$. 因为

$$\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+k^n}=k\cdot\sqrt[n]{\left(\frac{1}{k}\right)^n+\left(\frac{2}{k}\right)^n+\cdots+\left(\frac{k-1}{k}\right)^n+1},$$

而

$$1\leqslant\sqrt[n]{\left(\frac{1}{k}\right)^n+\left(\frac{2}{k}\right)^n+\cdots+\left(\frac{k-1}{k}\right)^n+1}\leqslant\sqrt[n]{k}\to1(n\to\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{1^n+2^n+\cdots+k^n}}{\sqrt[n]{n^2}}=k.$$

令 $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|<\frac{1}{k}$,解这个不等式可得 $\frac{k-1}{k+1}<x<\frac{k+1}{k-1}$.

当 $x=\frac{k+1}{k-1}$ 时,级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^n+2^n+\cdots+k^n}{n^2}\left(\frac{1}{k}\right)^n$. 易见其通项

$$a_n=O\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty),$$

所以原级数在 $x=\frac{k+1}{k-1}$ 处收敛;类似地讨论可知,原级数在 $x=\frac{k-1}{k+1}$ 处也收敛.

故原级数的收敛域为 $\left[\frac{k-1}{k+1},\frac{k+1}{k-1}\right]$.

(2)令 $y=\frac{1}{x}$,则原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}n^2y^n$. 易知它的收敛域为 $(-1,1)$.

令 $\left|\frac{1}{x}\right|<1$,解之可得:$x>1$ 或 $x<-1$,即原级数的收敛域为

$$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty).$$

(3)用根式判别法.

$\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^{n!}}=\lim_{n\to\infty}|x|^{(n-1)!}$,欲使 $\rho<1$,必须 $|x|<1$. 当 $x=\pm1$ 时,级数变为 $\sum_{n=0}^{\infty}1$,显然发散. 故原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

例 5.46 设 $a_n>0$,$A_n=\sum_{k=0}^{n}a_k(n=0,1,\cdots)$ 且 $A_n\to+\infty$,$\frac{a_n}{A_n}\to0(n\to\infty)$.

证明:级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径 $R=1$.

证明 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=1-\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}=1$,所以级数 $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ 的收敛半径为1. 而当 $|x|<1$ 时,由

$$0\leqslant a_n|x|^n\leqslant A_n|x|^n\quad(n=0,1,\cdots)$$

可知，$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n |x|^n$ 收敛. 但由 $A_n \to +\infty (n \to \infty)$ 知，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散，故级数 $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$.

例 5.47　将下列函数按要求展开.

(1)将 $f(x) = e^x \sin x$ 展开成 x 的幂级数；

(2)将 $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 展开成 $\dfrac{1}{x}$ 的幂级数；

(3)将 $f(x) = \ln x$ 展开成 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂级数.

解　(1)将 $f(x)$ 采用间接法展开，要涉及两个幂级数相乘，计算较为复杂. 下面采用直接法展开.

用数学归纳法可以证明：$f^{(n)}(x) = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$. 由此可得

$$f^{(n)}(0) = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4} (n = 1,2,\cdots),$$

于是可得 $f(x)$ 关于 x 的展开式：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n. \tag{1}$$

但它是否收敛于 $f(x)$ 呢？通常我们要研究其余项，看它是否一致地趋于 0？这是非常困难的！为了避开这一点我们采用下面的做法：

因为 e^x 和 $\sin x$ 的麦克劳林展开式都在 $(-\infty, +\infty)$ 上成立，所以它们都在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛. 由级数的乘积定理知，$e^x \sin x$ 也能展开成幂级数，且收敛半径 $R = +\infty$. 再利用幂级数展开式的唯一性定理知，式(1)在 $(-\infty, +\infty)$ 上必收敛于 $e^x \sin x$.

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\frac{1}{x} - 1} = -\dfrac{1}{x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^n, \quad |x| > 1.$$

(3)先求 $\ln \dfrac{1+y}{1-y}$ 关于 y 的展开式.

$$\ln \frac{1+y}{1-y} = \ln(1+y) - \ln(1-y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1}}{n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} y^{2n+1}, \quad y \in (-1,1).$$

故 $$f(x)=\ln x=\ln\frac{1+\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x-1}{x+1}}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1},x\in(0,+\infty).$$

类题 设$f(x)=e^{x^2}\sin x$,求$f^{(2012)}(0)$(苏州大学).

提示 因为

$$e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!},x\in(-\infty,+\infty),\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty),$$

且它们的麦克劳林展开式在$(-\infty,+\infty)$上都绝对收敛,所以$e^{x^2}\sin x$也能展开成幂级数,并且收敛半径$R=+\infty$.由幂级数展开式的唯一性,只需计算它们的柯西积即可.而它们的柯西积是

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!(n-k)!}\right)x^{2n+1},x\in(-\infty,+\infty).$$

由此可见,在$f(x)$的展开式中偶次幂并没出现,所以$f^{(2012)}(0)=0$.

事实上,如果注意到$f(x)$是奇函数,而奇函数的展开式中不会出现偶次幂,因此$f^{(2012)}(0)=0$.

例 5.48 将函数$f(x)=\dfrac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$展开成$x$的幂级数.

解

$$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{x(\cos\alpha-x\cos^2\alpha-x\sin^2\alpha)}{(1-x\cos\alpha)^2+x^2\sin^2\alpha}$$

$$=\mathrm{Re}\frac{x(\cos\alpha+i\sin\alpha)[(1-x\cos\alpha)+ix\sin\alpha]}{[(1-x\cos\alpha)+ix\sin\alpha][(1-x\cos\alpha)-ix\sin\alpha]}$$

$$=\mathrm{Re}\frac{xe^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}}=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}x^ne^{in\alpha}\quad(|x|<1)$$

$$=\mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}x^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,\qquad x\in(-1,1).$$

本例亦可用待定系数法展开.设

$$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,$$

两边同乘以$1-2x\cos\alpha+x^2$,并比较x同次幂的系数,可得

$$a_0=0,a_n=\cos n\alpha,n=1,2,\cdots.$$

因此 $$\frac{x\cos\alpha-x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha,x\in(-1,1).$$

类题 1　求函数 $f(x)=\dfrac{x\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ 的麦克劳林展开式(用两种方法).

$$\left(f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin n\alpha,x\in(-1,1)\right).$$

类题 2　证明:当 $|x|<1$ 时,

$$\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{n}x^n.$$

提示　设 $f(x)=\ln(1-2x\cos\alpha+x^2)$,对 $f(x)$ 关于 x 求导

$$f'(x)=\frac{2(x-\cos\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}+\frac{1}{x-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}.$$

当 $|x|<1$ 时,应用 $\dfrac{1}{1-x}$ 的展开式,并利用逐项积分定理可得结论.

例 5.49　设函数 $f(x)=\dfrac{1}{1-2x-x^2}$,证明级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛(浙大).

证明　通过 $f(x)$ 的麦克劳林展开,求出数项级数的通项 $\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$.

为此,记 $a=\sqrt{2}+1,b=\sqrt{2}-1$,则

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x+a}+\frac{1}{b-x}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}a}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x}{a}}+\frac{1}{2\sqrt{2}b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{x}{b}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{a}\right)^n+\frac{1}{2\sqrt{2}b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^n\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}+\frac{1}{b^{n+1}}\right]x^n,\quad |x|<b.\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{(-1)^n}{a^{n+1}}+\frac{1}{b^{n+1}}\right].$$

注意到 $ab=1$,我们有

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[a^{n+1}+(-1)^nb^{n+1}\right]\\&=\frac{a^{n+1}}{2\sqrt{2}}\left[1+(-1)^n\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]\\&\geqslant\frac{a^{n+1}}{2\sqrt{2}}\left[1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]>0,\end{aligned}$$

这表明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 是正项级数.

由

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}}{\dfrac{1}{a^{n+1}}}=2\sqrt{2}\lim_{n\to\infty}\left[1+(-1)^n\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}\right]=2\sqrt{2}\neq 0$$

和级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{a^{n+1}}$ 的收敛性,利用正项级数的比较判别法知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.

例 5.50 若 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间是 $(-R,R)$,存在数列 $\{x_n\}\subset(-R,R)$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,且 $f(x_n)=0,n=1,2,\cdots$. 证明: $a_n=0,n=0,1,2,\cdots$.

证明 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知, $a_0=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)=0$. 此时, $f(x)$ 可写成:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\overset{\Delta}{=\!=}xg(x).$$

因为 $\forall x_n\neq 0,g(x_n)=f(x_n)=0$. 用上述方法便可推知, $a_1=0$. 如此下去,可得 $a_2=a_3=\cdots=a_n=0$.

例 5.51 证明陶贝尔定理.

证明 记 $\sigma_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k|a_k|$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}n|a_n|=0$ 可知, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$.

令 $x_n=1-\dfrac{1}{n}$,由 $\lim\limits_{x\to1^-}S(x)=S$ 可知, $\lim\limits_{n\to\infty}S(x_n)=S$.

于是, $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+$,当 $n>N$ 时,有

$$\left|S\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\right|=|S(x_n)-S|<\frac{\varepsilon}{3},\quad \sigma_n<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$n|a_n|<\frac{\varepsilon}{3}\text{ 或 }|a_n|<\frac{\varepsilon}{3n}.$$

设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,当 $0<x<1$ 时,有

$$\begin{aligned}S_n-S&=S(x)-S+\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\\&=S(x)-S+\sum_{k=0}^{n}a_k(1-x^k)-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_kx^k,\end{aligned}$$

而

$$1-x^k=(1-x)(1+x+\cdots+x^{k-1})\leqslant k(1-x),$$

故有

$$|S_n - S| \leqslant |S(x) - S| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| x^k$$

$$\leqslant |S(x) - S| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

令 $x = 1 - \dfrac{1}{n}$，则有

$$|S_n(x) - S| \leqslant \left|S\left(1 - \frac{1}{n}\right) - S\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

注 5.7　一个简单的充分条件是下面的命题.

命题 5.5　设 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in (-1,1), a_n \geqslant 0$ 且 $\lim\limits_{x \to 1^-} S(x) = S$，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$.

证明　记 $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$，则 $S_n(x) \leqslant S(x), \forall x \in [0,1]$. 令 $x \to 1^-$，可得：$S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant S$，即 $\{S_n\}$ 单调递增有上界，因此数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛. 由阿贝尔第二定理可知，幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 再由连续性定理，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \to 1^-} S(x) = S.$$

例 5.52　设 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}$. 求证：

(1) $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续；　　(2) $f(x)$ 在 $x = -1$ 处可导；

(3) $\lim\limits_{x \to 1^-} f'(x) = +\infty$；　　(4) $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不可导.

证明　(1) 因为当 $|x| \leqslant 1$ 时，有

$$\left|\frac{x^n}{n^2 \ln(1+n)}\right| \leqslant \frac{1}{n^2 \ln(1+n)} \leqslant \frac{1}{n^2 \ln 2},$$

所以表示 $f(x)$ 的幂级数在 $[-1,1]$ 上一致收敛. 由连续性定理可知，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.

(2) 对幂级数在收敛区间 $(-1,1)$ 内逐项求导可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \ln(1+n)}, x \in (-1,1).$$

当 $x = -1$ 时，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n \ln(1+n)}$ 收敛. 由阿贝尔第二定理知，幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 在$[-1,0]$上一致收敛. 由逐项微分定理知,

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)},x\in[-1,0],$$

即$f(x)$ 在$x=-1$ 处可导.

(3)当$x>0$ 时,由$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\ln(1+n)}$ 可看出$f'(x)$ 为正的递增函数,因此,广义极限

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=A$$

存在.

若$A<+\infty$,则$f'(x)$ 在$[0,1]$上有界. 注意到

$$\frac{1}{n\ln(1+n)}>0,n=1,2,\cdots,$$

由命题 5.5 知,数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}$ 收敛. 但由柯西积分判别法易知,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(1+n)}$ 发散,矛盾. 因此$A=+\infty$,即

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty.$$

(4)由洛必达法则及(3)的结论知,

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}f'(x)=+\infty,$$

故$f'(1)$ 不存在.

例 5.53 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

(1)求 $\ln^2(1+x)$ 在$x=0$ 点的幂级数展开式;

(2)求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 的和;

(3)求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 的和.

解 (1)$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(|x|<1)$ 是绝对收敛的级数. 由于两个绝对收敛级数可以任意相乘,记

$$a_n=\frac{(-1)^n}{n+1},$$

则有

$$\ln^2(1+x) = x^2\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)^2 = x^2\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n,$$

其中

$$\begin{aligned} C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)+(n-k+1)}{(k+1)(n-k+1)} \\ &= \frac{(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{1}{k+1}+\frac{1}{n-k+1}\right\} \\ &= \frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}, \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} \ln^2(1+x) &= x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{2(-1)^n}{n+2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\right\}x^n \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}x^{n+1}, x\in(-1,1). \end{aligned}$$

(2)用莱布尼茨判别法不难判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$$

收敛(注意应用 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=O(\ln n)(n\to\infty)$),所以对 $\ln^2(1+x)$ 展开的幂级数,应用阿贝尔第二定理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}=\frac{\ln^2 2}{2}.$$

(3)由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6},$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right\}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$$

$$=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}.$$

类题 (1) $(\arctan x)^2$ 在 $x=0$ 点展开成幂级数;

(2)求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right\}$ 的和.

$$\left((\arctan x)^2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}\left\{1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}\right\}x^{2(n+1)},\ |x|<1\right).$$

例 5.54 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$,求 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx$.

解 分部积分得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int_0^{+\infty}x\frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}xd[\ln(1+e^{-x})]$$

$$=-x\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-x})dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\ln(1+e^{-x})dx. \tag{1}$$

由 $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$,式(1)可化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^{-nx}}{n}dx. \tag{2}$$

由阿贝尔判别法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

由逐项积分定理,式(2)可化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+1}dx=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},$$

这里利用了上例的结果.

例 5.55　设 $\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y = 1$,其中 $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$,计算 $\int_0^{+\infty} y(x)\,dx$. (浙大)

解　令 $t = e^{-x}$,则

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1 - t^2}{2t}, \quad \operatorname{sh} y = \frac{2t}{1 - t^2},$$

从而
$$y = \operatorname{sh}^{-1} \frac{2t}{1 - t^2} = \ln\left(\frac{2t}{1 - t^2} + \sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1 - t^2)^2}}\right) = \ln \frac{1 + t}{1 - t}.$$

注意到 $x = -\ln t, dx = -\dfrac{dt}{t}$,有

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln \frac{1 + t}{1 - t} dt = \int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 + t)\,dt - \int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 - t)\,dt.$$

而

$$\frac{1}{t} \ln(1 + t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^{n-1}}{n}, t \in [0,1],$$

上式在 $t = 0$ 处理解为取极限的过程. 由幂级数逐项积分定理,有

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 + t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_0^1 t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

同理可得

$$\int_0^1 \frac{1}{t} \ln(1 - t)\,dt = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

故
$$\int_0^{+\infty} y(x)\,dx = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{4}.$$

例 5.56　求 $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^{n-1}}$ 之和.

解　由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n(n+1)}{2^n}$, 所以考虑幂级数

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n + 1) x^{n-1}, |x| < 1.$$

当 $|x| < 1$ 时,逐项积分有

$$S_1(x) = \int_0^x S(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} (n + 1) x^n,$$

$$\int_0^x S_1(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x^2}{1 - x}.$$

求导得

$$S_1(x) = \frac{2x - x^2}{(1 - x)^2}, \quad S(x) = S_1'(x) = \frac{2}{(1 - x)^3}.$$

于是,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{1}{2}S\left(\frac{1}{2}\right)=8.$$

例 5.57 求极限 $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}$（中科院）.

解 这是一个二重级数求和问题. 记

$$\begin{aligned}S_{m,n}&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{i+j}}{i+j}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\int_0^1 x^{i+j-1}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}x^{i+j-1}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left\{\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i+1}x^i\cdot\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}x^{j-1}\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left\{\frac{x+(-1)^{m+1}x^{m+1}}{1+x}\cdot\frac{1+(-1)^{n+1}x^n}{1+x}\right\}\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\{x+(-1)^{m+1}x^{m+1}+(-1)^{n+1}x^{n+1}+(-1)^{m+n}x^{m+n+1}\}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

注意到

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^k}{(1+x)^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}\to 0(k\to\infty),$$

我们有

$$\lim_{m,n\to\infty}S_{m,n}=\int_0^1\frac{x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]\Big|_0^1=\ln 2-\frac{1}{2}.$$

例 5.58 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的连续函数，若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上能用多项式一致逼近，则 $f(x)$ 是一个多项式.

证明 若 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上能用多项式一致逼近，则存在多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 及 $N>0$，当 $n\geqslant N$ 时，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|P_n(x)-f(x)|<1$. 于是，当 $n\geqslant N$ 时，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$|P_n(x)-P_N(x)|\leqslant|P_n(x)-f(x)|+|P_N(x)-f(x)|<2.$$

这表明，多项式 $P_n(x)-P_N(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界，所以它必是常数. 即

$$C=\lim_{n\to\infty}(P_n(x)-P_N(x))=f(x)-P_N(x),$$

故 $f(x)=P_N(x)+C$ 是一个多项式.

四、傅里叶级数

傅里叶级数是一类三角级数，它是幂级数之外又一种特殊的函数项级数. 将函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数和展开成泰勒级数相比，对 $f(x)$ 的要求要宽松得多！并且它的部分和在整个区间上都与 $f(x)$ 吻合得较理想，因此傅里叶级数比幂级数

更有力、适用性更广.

1. 函数的傅里叶展开

将函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数的理论基础是三角函数系的正交性,展开的关键是计算傅里叶系数.

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,则傅里叶系数

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin x)$ 称为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数. 它未必收敛,即使收敛也未必收敛于 $f(x)$,因此通常记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin x),$$

"~"仅表示右边的级数是由 f 而产生的.

一般来说,若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots,$$

其中 $l = \frac{b-a}{2}$,相应地有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

若 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期,则在上面的系数公式中,应取区间 $[a,b] = [-l,l]$.

若 $f(x)$ 是奇函数,则 $a_n = 0$,相应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

称为正弦级数.

若 $f(x)$ 是偶函数,则 $b_n = 0$,相应的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

称为余弦级数.

但值得注意的是:虽然只有周期函数才可能有傅里叶级数,但当 f 的定义域是长度为 2π(或 $2l$) 的区间时,可先将其延拓成周期函数,然后再展开成傅里叶级数,这个傅里叶级数就是 f 在该区间上的傅里叶级数(实际计算时,这种延拓只是

观念上的,我们并不把它写出来).

2. 傅里叶级数的收敛定理

若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上按段光滑(即f在$[-\pi,\pi]$上除有限个点之外有连续的导数,而在这有限个点处f及f'有单侧极限),则$f(x)$的傅里叶级数的和函数为

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & \text{当 } x\in(-\pi,\pi) \text{ 为 } f(x) \text{ 的连续点时},\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & \text{当 } x\in(-\pi,\pi) \text{ 为 } f(x) \text{ 的间断点时},\\ \dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}, & \text{当 } x=\pm\pi \text{ 时}.\end{cases}$$

若$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续、按段光滑,且$f(\pi)=f(-\pi)$,则

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),x\in[-\pi,\pi].$$

3. 傅里叶级数的性质

1)傅里叶系数的渐近性质.

由黎曼引理知,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

随着f的可导性的提高,a_n,b_n趋向于零的速度也会加快.

命题5.6 设f在$[-\pi,\pi]$上有直到$k+1$阶的导数,$f^{(k+1)}$在$[-\pi,\pi]$上可积,且$f^{(l)}(\pi)=f^{(l)}(-\pi)(l=0,1,\cdots,k)$,则

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right),\quad b_n=o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)(n\to\infty).$$

2)傅里叶级数的唯一性定理.

命题5.7 设f是以2π为周期的连续函数,且其傅里叶系数均等于0,即$a_0=0,a_n=b_n=0,n=1,2,\cdots$,则$f$必是恒为零的常值函数.

这个命题告诉我们,如果两个连续函数在某一给定区间上的傅里叶级数相同,则这两个连续函数相等.

3)傅里叶级数的逐项积分定理:设$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上可积,且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$一定收敛,且$\forall x_0,x\in[-\pi,\pi]$,有

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}t+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)\mathrm{d}t.$$

进而,取$x_0=0$可得

$$\int_0^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right),$$

上式右端是上式左端函数的傅里叶级数.

注 5.8　只要 f 可展开成傅里叶级数,不论这个级数是否收敛,是否收敛于 $f(x)$,它逐项积分后所得到的级数一定收敛于 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

另外,这个定理还告诉我们,一个三角级数 $a_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 有资格成为某个可积函数的傅里叶级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n}$ 收敛.

例如,级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\ln n}$ 虽然在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛,但它却不能是任何可积函数的傅里叶级数.

4)傅里叶级数逐项求导定理:设 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续、按段光滑,且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

若 f' 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑,则下面的逐项求导公式成立:

$$\frac{f'(x+0)+f'(x-0)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

若 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,则有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx),x\in(-\pi,\pi).$$

进而,若还有 $f'(-\pi)=f'(\pi)$,则上式对 $x=\pm\pi$ 也成立.

傅里叶级数的部分和 $S_m(x)$ 的性质以及由它导出的贝塞尔(Bessel)不等式和巴塞伐尔(Parseval)等式在此不再赘述.

例 5.59　求 $f(x)=x^3$ 在区间 $[0,2\pi]$ 上的傅里叶级数展开式,并由此证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

解　因为 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可积,所以可展开成傅里叶级数. 而

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^3\,\mathrm{d}x=4\pi^3,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^3\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{12}{n^2}\pi,n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^3\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{12}{n^3}-\frac{8\pi^2}{n},n=1,2,\cdots.$$

故

$$f(x)\sim2\pi^3+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{n^2}\cos nx+\frac{3-2n^2\pi^2}{n^3}\sin nx\right).$$

显然,当 $x\in(0,2\pi)$ 时,$f(x)=x^3$ 连续,故

$$x^3 = 2\pi^3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3\pi}{n^2}\cos nx + \frac{3-2n^2\pi^2}{n^3}\sin nx\right), x \in (0,2\pi). \tag{1}$$

当 $x = 0$ 时,级数收敛于 $\frac{f(0+0)+f(2\pi-0)}{2} = 4\pi^3$. 于是由式(1)可得

$$4\pi^3 = 2\pi^3 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\pi}{n^2}, \quad \text{即} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

再在式(1)中,令 $x = \pi$,可得

$$\pi^3 = 2\pi^3 - 12\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \text{即} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

例 5.60 求和 $S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}$.

解 考虑函数 $f(x) = e^{\sqrt{2}x}, x \in [0,2\pi)$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数,则

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{2}x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}(e^{2\sqrt{2}\pi}-1),$$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\sqrt{2}x}\cos nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2+2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}x}\cos nx + \frac{n}{2}e^{\sqrt{2}x}\sin nx\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+2}(e^{2\sqrt{2}\pi}-1), \end{aligned}$$

所以 $f(x) = e^{\sqrt{2}x}$ 的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2}\pi}(e^{\sqrt{2}\pi}-1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2+2}(e^{2\sqrt{2}\pi}-1)\cos nx + b_n\sin nx\right].$$

由收敛定理,上面的级数在 $x=0$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}(f(0+0)+f(2\pi-0)) = \frac{1}{2}(1+e^{2\sqrt{2}\pi}).$$ 于是,有

$$\frac{1}{2}(1+e^{2\sqrt{2}\pi}) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}(e^{2\sqrt{2}\pi}-1) + \frac{\sqrt{2}}{\pi}(e^{2\sqrt{2}\pi}-1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2},$$

即

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2} = \frac{(\sqrt{2}\pi+1)+(\sqrt{2}\pi-1)e^{2\sqrt{2}\pi}}{4(e^{2\sqrt{2}\pi}-1)}.$$

例 5.61 设

$$f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, & x = 0, \\ -\pi - x, & -\pi < x < 0. \end{cases}$$

(1)求 f 的傅里叶级数展开式;

(2)讨论 f 的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi]$ 上是否收敛于 f,是否一致收敛于 f?

解　(1)由于 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上为奇函数,故

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{n}, n = 1,2,\cdots.$$

所以 f 的傅里叶级数展开式为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx.$$

(2)因为 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上除 $x = 0$ 外都连续,故当 $x \in (-\pi,\pi)$,且 $x \neq 0$ 时,有

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\sin nx.$$

又当 $x = 0$ 时,级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(0-0) + f(0+0)] = 0 = f(0).$$

当 $x = \pi$ 时,级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(\pi-0) + f(-\pi+0)] = 0 = f(\pi).$$

由此可见,f 的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi]$ 上收敛于 f.

由于 f 在 $(-\pi,\pi]$ 上不连续,由连续性定理,若级数在 $(-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 f,这就与 f 的不连续性相矛盾,故 f 的傅里叶级数在 $(-\pi,\pi]$ 上不一致收敛于 f.

例 5.62　设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,a_n, b_n 是傅里叶系数,求函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 A_n, B_n,并利用 $F(x)$ 的展开式证明巴塞伐尔等式:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

解　$\forall x \in \mathbf{R}$,有

$$F(x+2\pi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t+2\pi)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t = F(x),$$

即 $F(x)$ 是以 2π 为周期的函数,而 $F(x)$ 的连续性显然.

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(t-x)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)f(y)\,\mathrm{d}y = F(x),$$

即 $F(x)$ 是偶函数. 于是,函数 $F(x)$ 的傅里叶系数

$$B_n = 0, n = 1,2,\cdots,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}t \quad (\text{交换了积分的顺序}).$$

对内层积分作变量替换 $t+x=y$,注意到 f 的周期性,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos n(y-t)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos nt\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\cos ny\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\sin nt\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin y\mathrm{d}y$$

$$= a_n\cos nt + b_n\sin nt.$$

于是

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,(a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t$$

$$= a_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}t + b_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= a_n^2 + b_n^2, n = 0,1,2,\cdots.$$

故

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx$$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx.$$

在上式中,令 $x=0$,可得巴塞伐尔等式:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).$$

注 5.9 本例中给出的 $F(x)$ 称为函数 $f(x)$ 的卷积,它具有许多好的性质. 有兴趣的同学可参看任何一本傅里叶分析的教材或专著. 另外,巴塞伐尔等式是熟知的结果,利用它很容易证明傅里叶级数的唯一性定理.

例 5.63 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2), x\in[0,\pi]$.

证明 这类题目不能把它视为级数求和,而应把它看成右端函数的傅里叶展

开.

记$f(x)=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)$,从欲证的等式可以看出,需将$f(x)$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数. 为此,只需将$g(x)=3x^2-6\pi x$在$[0,\pi]$上展开成余弦级数即可. 而

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\mathrm{d}x=-4\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(3x^2-6\pi x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{12}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

由傅里叶级数收敛定理,有

$$3x^2-6\pi x=-2\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12\cos nx}{n^2},x\in[0,\pi],$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2),x\in[0,\pi].$$

例 5.64　(1)设$f(x)$以2π为周期,在$(0,2\pi)$内有界,证明:若$f(x)\downarrow$,则$b_n\geqslant 0$;若$f(x)\uparrow$,则$b_n\leqslant 0$　$(n=1,2,\cdots)$;

(2)设$f'(x)$在$(0,2\pi)$内有界,证明:若$f'(x)\uparrow$,则$a_n\geqslant 0$;若$f'(x)\downarrow$,则$a_n\leqslant 0$　$(n=1,2,\cdots)$;

(3)设$f(x)$在$[0,2\pi]$上连续,证明:若$F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)\mathrm{d}t\downarrow$,则$a_n\geqslant 0$;若$F(x)\uparrow$,则$a_n\leqslant 0$　$(n=1,2,\cdots)$.

证明　(1)将$[0,2\pi]$$n$等分,则

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{i\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x+\int_{\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}^{i\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}f(x)\sin nx\mathrm{d}x-\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}f\left(t+\frac{\pi}{n}\right)\sin nt\mathrm{d}t\right]\left(\text{令}\,x=t+\frac{\pi}{n}\right)\\&=\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}\int_{(i-1)\frac{2\pi}{n}}^{\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}}\left[f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right]\sin nx\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

注意到当$f(x)\downarrow$时,$f(x)-f\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\geqslant 0$,在区间$\left[(i-1)\frac{2\pi}{n},\left(i-\frac{1}{2}\right)\frac{2\pi}{n}\right]$上,$\sin nx\geqslant 0$,所以$b_n\geqslant 0$.

类似地可证,当$f(x)\uparrow$时,$b_n\leqslant 0$.

(2)由傅里叶系数的计算公式易得，$a_n = -\frac{1}{n}b'_n$，这里 b'_n 是 $f'(x)$ 的傅里叶系数. 对 f' 应用(1)的结论知，若 $f'(x)\uparrow$，则 $b'_n \leqslant 0$，故 $a_n \geqslant 0$；若 $f'(x)\downarrow$，则 $b'_n \geqslant 0$，故 $a_n \leqslant 0$.

(3)由 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续知，$F(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可导，用 A_n, B_n 表示 $F(x)$ 的傅里叶系数，则有

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}F(x)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\left(f(x) - \frac{a_0}{2}\right)\sin nx\mathrm{d}x\right] \\ &= -\frac{b_n}{n}, n = 1,2,\cdots. \end{aligned}$$

类似地可得 $B_n = \frac{a_n}{n}, n = 1,2,\cdots.$

对 $F(x)$ 应用(1)的讨论知，若 $F(x)\downarrow$，则 $a_n \geqslant 0$；若 $F(x)\uparrow$，则 $a_n \leqslant 0$.

注 5.10 从本例的证明过程可以看出，关键是证明(1). 而(1)的证明，也可用第二积分中值定理：

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}(1-\cos\xi)[f(0) - f(2\pi)], \xi \in (0,2\pi),$$

由此易得结论.

例 5.65 设 f,g 在 $[0,2\pi]$ 上可积，a_n, b_n 和 α_n, β_n 分别表示 f 和 g 的傅里叶系数，则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\alpha_n + b_n\beta_n).$$

证明 写出 $f+g$ 和 $f-g$ 的巴塞伐尔等式：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)+g(x))^2\mathrm{d}x = \frac{(a_0+\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n+\alpha_n)^2 + (b_n+\beta_n)^2],$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-g(x))^2\mathrm{d}x = \frac{(a_0-\alpha_0)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n-\alpha_n)^2 + (b_n-\beta_n)^2],$$

将上两式相减可得结论.

作为例 5.65 的一个应用，我们用它来证明傅里叶级数的逐项积分定理.

例 5.66 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，且

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

则 $\forall [a,b] \subset [-\pi,\pi]$，有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

证明　由例 5.65 知,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)(a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x,$$

上式对 $[-\pi,\pi]$ 上的任一可积函数 $g(x)$ 都成立. 特别地,取

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b], \\ 0, & x \in [-\pi,\pi]\backslash[a,b], \end{cases}$$

则上式就变成

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b (a_n\cos nx + b_n\sin nx)\,\mathrm{d}x.$$

例 5.67　设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx + \beta_k\sin kx),$$

求 $T_n(x)$(即确定系数 α_k,β_k),使均方差

$$\delta = \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2\mathrm{d}x$$

最小.

解　设 a_n,b_n 为 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数,而

$$\begin{aligned}
\delta &= \int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - T_n(x))^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} T_n^2(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\pi\left[\frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{n}(a_k\alpha_k + b_k\beta_k)\right] + \\
&\quad \pi\left[2\cdot\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right] \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x + \pi\frac{(a_0 - \alpha_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[(a_k - \alpha_k)^2 + (b_k - \beta_k)^2] - \\
&\quad \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right],
\end{aligned}$$

上式第一、三项为常数. 由此可见,当且仅当

$$\alpha_k = a_k,\beta_k = b_k \quad (k = 1,2,\cdots,n),\alpha_0 = a_0 \text{ 时}$$

δ 最小,最小值 $\delta = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x - \pi\left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2 + \beta_k^2)\right]$.

这个结论告诉我们,在均方收敛的意义下,连续函数 $f(x)$ 的傅里叶三角多项式是所有三角多项式的最佳逼近,并且是一致的.

例 5.68 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有连续导数,$f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上分段光滑,且 $\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$,试证:

$$\int_0^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明 将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi,0]$ 上,由已知条件,延拓后的函数能在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数,且 $a_0 = 0, b_n = 0$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad x \in [0,\pi].$$

逐项微分可得

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \sin nx, \quad x \in [0,\pi],$$

二者均为傅里叶展开式. 利用巴塞伐尔等式:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

类题 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上二阶连续可导,$f(0) = f(\pi) = 0$.

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin n x\,\mathrm{d}x, \quad n = 1,2,\cdots.$$

试证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ 收敛(华南理工).

提示 将 $f(x)$ 奇延拓到 $[-\pi,0]$ 上,则 $f'(x)$ 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数,而且能展开成傅里叶级数.

记 $f'(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数分别为 A_n, B_n 则 $A_0 = 0, B_n = 0, n = 1,2,\cdots$.

由

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{n\pi} f(x)\cos nx\,\Big|_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

$$= \frac{A_n}{n}, n = 1,2,\cdots,$$

可得

$$A_n = na_n, n = 1,2,\cdots.$$

由巴塞伐尔等式,有

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f'^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ 收敛.

例 5.69　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积且平方可积,$\{\varphi_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的标准正交系,即

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

记

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$.

证明　令 $S_m(x) = \sum\limits_{n=1}^{m} a_n\varphi_n(x)$, 则

$$\begin{aligned} &\int_a^b [f(x) - S_m(x)]^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\int_a^b f(x)S_m(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b S_m^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\sum_{n=1}^{m} a_n^2 + \sum_{n=1}^{m} a_n^2 \\ &= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{n=1}^{m} a_n^2 \geqslant 0 \quad (\text{这里利用了}\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}\text{的正交性}), \end{aligned}$$

即

$$\sum_{n=1}^{m} a_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

这表明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 的部分和有上界,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 5.70　设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且对任意的 $n \geqslant 1$,均有

$$\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

证明：$f(x)$ 为常值函数(南大).

证明 先将 $f(x)$ 偶延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上,然后再作周期为 2π 的周期延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上,则 $f(x)$ 的傅里叶系数 $b_n=0,n=1,2,\cdots$.

由已知条件, $a_n=0,n=1,2,\cdots$. 所以,$f(x)$ 的傅里叶展开为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}.$$

由傅里叶级数的收敛定理, $f(x)=\frac{a_0}{2},x\in[0,\pi)$. 再由 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续性,有 $f(x)=\frac{a_0}{2},x\in[0,\pi]$.

类题 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, $f(-\pi)=f(\pi)$, 且

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,n=0,1,\cdots;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0,n=1,2,\cdots.$$

证明：$f(x)\equiv 0,\forall x\in[-\pi,\pi]$.

提示 用巴塞伐尔等式.

由已知条件, $a_n=0(n=0,1,\cdots),b_n=0(n=1,2,\cdots.)$. 由于 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续,所以巴塞伐尔等式成立：

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=0.$$

由连续函数的性质知, $f^2(x)\equiv 0$,即 $f(x)\equiv 0,\forall x\in[-\pi,\pi]$.

第六讲　多元函数的微分学

在这一讲中,我们将涉及多元函数的极限与连续、多元函数的偏导数和全微分、隐函数(组)存在定理及隐函数求导,以及偏导数的应用——在几何上的应用、泰勒公式和极值(条件极值和无条件极值)等重要内容.

一、多元函数的极限与连续

1. 欧氏空间的基本定理

$\mathbf{R}$ 中的六个基本定理除了“确界原理”“单调有界定理”由于涉及点之间的大小关系而不再有意义外,其余的定理在 $\mathbf{R}^n$ $(n>1)$ 中依然成立. 它们是:

(1)闭区域套定理——常用其特殊形式闭矩形套定理;

(2)聚点定理: $\mathbf{R}^n$ 中的有界无限点集必有聚点;

(3)柯西收敛准则:收敛点列⇔基本列;

(4)紧性定理: $\mathbf{R}^n$ 中的点集 S 是紧集⇔ S 是有界闭集.

例 6.1　设 S 是 $\mathbf{R}^n$ 的子集,则以下三个命题等价:

(1) S 是有界闭集;

(2) S 是紧集;

(3) S 的任一无限子集在 S 中必有聚点.

证明　由紧性定理可知,(1)⇔(2).

下证:(1)⇔(3).

(1)⇒(3). 设 S 是有界闭集. 由聚点定理知, S 的无限点集必有聚点,因为 S 是闭的,所以这个聚点必属于 S.

(3)⇒(1). 若 S 的任一无限子集在 S 中都有聚点,则显然 S 中的任一收敛点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 的极限必属于 S,因此 S 含有它的全部聚点,即 S 是闭集.

若此时 S 不是有界的,那么在 S 中存在点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 满足

$$|\boldsymbol{x}_k|>k,\qquad k=1,2,\cdots.$$

而 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 是无限集,且在 $\mathbf{R}^n$ 中(因而在 S 中)没有聚点,矛盾. 这表明 S 是有界集.

例 6.2　设 S_1,S_2 都是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集, $S_1\cap S_2=\varnothing$,证明:存在两个开集 O_1 和 O_2 ,使得 $S_i\subset O_i$,且 $O_1\cap O_2=\varnothing$.

证明　先证: $d=d(S_1,S_2)>0$.

用反证法. 若 $d=d(S_1,S_2)=0$,则由距离的定义知, $\exists \boldsymbol{x}_n\in S_1,\boldsymbol{y}_n\in S_2$,使得

$$\lim_{n\to\infty}|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{y}_n|=0. \tag{1}$$

由 S_1,S_2 的有界性,利用聚点定理知 $\{\boldsymbol{x}_n\},\{\boldsymbol{y}_n\}$ 都存在收敛子列,仍记为 $\{\boldsymbol{x}_n\},\{\boldsymbol{y}_n\}$,并设 $\boldsymbol{x}_n\to x,\boldsymbol{y}_n\to y(n\to\infty)$. 由 S_1,S_2 的闭性知,$\boldsymbol{x}\in S_1,\boldsymbol{y}\in S_2$. 在式(1)中令 $n\to\infty$ 可得 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$,这与 $S_1\cap S_2=\varnothing$ 矛盾.

定义

$$O_i=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\,|\,d(\boldsymbol{x},S_i)<\frac{d}{3}\right\},i=1,2,$$

则 O_i 为开集,且 $S_i\subset O_i$,并有 $O_1\cap O_2=\varnothing$.

例 6.3 设 $S\subset\mathbf{R}^2$,$P_0(x_0,y_0)$ 为 S 的内点,$P_1(x_1,y_1)$ 为 S 的外点,证明:直线段 P_0P_1 至少与 S 的边界 ∂S 有一个交点(华东师大).

证明 用闭区域套定理. 记 $I_1=\overline{P_0P_1}$($\overline{P_0P_1}$ 表示直线段 P_0P_1,下同),将 I_1 二等分,分点为 P_2. 如果 P_2 是 ∂S 上的点,则问题得证,否则取 I_2,使得 I_2 的两个端点一个是 S 的内点,而另一个是 S 的外点. 此时,有 $I_2\subset I_1$,且 $I_2=\frac{1}{2}I_1$;

再将 I_2 二等分,分点为 P_3. 如果 P_3 是 ∂S 上的点,则问题得证,否则取 I_3,使得 I_3 的两个端点一个是 S 的内点,而另一个是 S 的外点. 此时,有 $I_3\subset I_2$,且 $I_3=\frac{1}{2^2}I_1$;

如此下去,要么到某一步时,得到一分点 $P_n\in\partial S$,则问题得证;要么这种步骤可无限地进行下去,得到一闭直线段列 $\{I_n\}$,满足 $I_{n+1}\subset I_n$,$I_n=\frac{1}{2^n}I_1\to 0(n\to\infty)$. 由闭区域套定理,存在 P^* 属于所有的直线段 I_n.

下证:$P^*\in\partial S$. 事实上,对 $\forall\varepsilon>0$,以 P^* 为中心,ε 为半径作小圆 $B_\varepsilon(P^*)$. 由于 P^* 属于所有 I_n,而且 $I_n\to 0(n\to\infty)$,所以当 n 适当大时,$I_n\in B_\varepsilon(P^*)$. 由 I_n 的造法可知,在 $B_\varepsilon(P^*)$ 既含有 S 的内点,又含有 S 的外点,故 $P^*\in\partial S$.

2. 多元函数的极限与连续

多元函数的极限(重极限)的定义从形式上看和一元函数的极限的定义完全一样. 但由于空间结构发生了变化,因此 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0$ 的方式比一元函数的情形要复杂得多! 从这个意义上讲,重极限的计算是非常困难的.

计算重极限常用的方法:①用两边夹定理;②利用变量替换化成一元函数的形式,然后用一元函数的结果.

累次极限是每次只考虑一个变量变化(其余变量暂时看做常数)的一元函数极限. 例如,$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$,先固定 $y\neq y_0$,让 $x\to x_0$,若极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)$$

存在,再令 $y\to y_0$,就有 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$. 由此可见,累次极限存在的

基础与重极限存在的基础是不同的(重极限只涉及定点 P_0 邻域内的所有点). 因此,两者的存在性之间一般来说,是没有关系的. 例如,

1)二重极限存在,但两个累次极限均不存在. 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}, & x\neq 0\text{ 且 }y\neq 0,\\ 0, & x=0\text{ 或 }y=0,\end{cases}$$

$(x,y)\to(0,0)$.

2)二重极限存在,两个累次极限中有一个不存在. 考察

$$f(x,y)=\begin{cases}y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\text{ 且 }y\neq 0,\\ 0, & x=0\text{ 或 }y=0,\end{cases}$$

$(x,y)\to(0,0)$.

3)两个累次极限都存在并相等,但二重极限不存在. 考察

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2},\qquad (x,y)\neq(0,0),$$

$(x,y)\to(0,0)$.

但是,当二重极限存在时,我们有下面的命题.

命题 6.1　当二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A$ 存在时,

(1)若 $y\neq y_0$,$\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)$ 存在,则 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=A$;

(2)若 $x\neq x_0$,$\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)$ 存在,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=A$.

证明重极限不存在常用的方法:①找两条特殊的路径,说明沿着这两条路径的极限不相等(若在函数式中出现了"x^2+y^2",可考虑用极坐标变换并说明极限与极角 θ 有关);②证明两个累次极限存在但不相等(这实际上用的是"命题 6.1").

多元函数连续的定义与一元函数连续的定义在形式上是一致的,因此它具有一元连续函数方面的许多性质. 如,局部保号性、局部有界性、四则运算法则以及复合函数的连续性等,它们之间的差异是由极限的差异引起的. 对二元连续函数 $f(x,y)$,如果固定一个变元,它显然是另一个变元的一元连续函数. 但是反过来,如果 $f(x,y)$ 关于每一个变元 x 和 y(作为一元函数)分别都是连续的,却不能保证它是二元连续函数. 不过,如果对 $f(x,y)$ 附加上一定的条件,仍然可以保证它是二元连续函数.

命题 6.2　设 $f(x,y)$ 在 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上分别关于 x 和 y 连续. 则当下列条件之一满足时,$f(x,y)$ 是 D 上的二元连续函数.

(1)$f(x,y)$ 在 D 上关于 y 满足李普希茨条件,即 $\forall(x,y_1)\in D,(x,y_2)\in D$,都有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|,L>0;$$

(2) $f(x,y)$ 在 D 上关于 y 单调;

(3) $f(x,y)$ 在 D 上对 x 的连续关于 y 是一致的,即 $\forall x_0\in D,\forall\varepsilon>0,\exists\delta=\delta(\varepsilon,x_0)>0$(与 y 无关),当 $|x-x_0|<\delta$ 时,对 $\forall y,(x,y),(x_0,y)\in D$,恒有

$$|f(x,y)-f(x_0,y)|<\varepsilon.$$

另外,紧集 K 上的多元连续函数具有闭区间 $[a,b]$ 上一元连续函数的性质:有界性、最值性、一致连续性等. 若 K 是连通紧集,它还具有介值性.

例 6.4 用定义证明:$\lim\limits_{(x,y)\to(3,+\infty)}\dfrac{xy-1}{y+1}=3.$

证明 先写出 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,+\infty)}f(x,y)=A$ 的精确数学定义.

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 和 $y>\dfrac{1}{\delta}$ 时,有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

具体到本题,由于

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\frac{|(x-3)y-4|}{y+1}<|x-3|+\frac{4}{y}\quad(y>0),$$

所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}>0$,当 $0<|x-3|<\delta$ 和 $y>\dfrac{1}{\delta}$ 时,有

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<|x-3|+\frac{4}{y}<\delta+4\delta=5\delta=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(3,+\infty)}\frac{xy-1}{y+1}=3.$$

例 6.5 研究下列极限的存在性. 若存在,求出它的极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}$;

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)}x^y$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(+\infty,+\infty)}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$;

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$.

解 (1)该极限存在. 这个极限有很多种求法,下面给出三种:

方法 1 由于 $(x,y)\to(0,0)$,故不妨设 $0<x^2+y^2<1$,注意到 $0\leqslant x^2y^2\leqslant x^2+y^2$,有

$$(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\leqslant(x^2+y^2)^{x^2y^2}\leqslant(x^2+y^2)^0,$$

由两边夹定理知,原极限 $=1$.

方法 2　由于

$$(x^2+y^2)^{x^2y^2}=\left[(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\right]^{\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}},$$

当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，$(x^2+y^2)^{x^2+y^2}\to 1$ 且 $0\leqslant\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant y^2\to 0$，所以原极限 $=1$.

方法 3　令 $Z=(x^2+y^2)^{x^2y^2}$，取对数得

$$\ln Z=x^2y^2\ln(x^2+y^2).$$

而
$$0\leqslant|x^2y^2\ln(x^2+y^2)|\leqslant\frac{1}{4}(x^2+y^2)|\ln(x^2+y^2)|,$$

由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)=0$ 可知，$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\ln Z=0$，从而原极限 $=1$.

(2) 由 $\lim\limits_{x\to0^+}x^y=0$ 知，$\lim\limits_{y\to0^+}\lim\limits_{x\to0^+}x^y=0$. 又由 $\lim\limits_{y\to0^+}x^y=1$ 知，$\lim\limits_{x\to0^+}\lim\limits_{y\to0^+}x^y=1$. 两个累次极限存在但不相等，故原极限不存在.

(3) 当 $x>0,y>0$ 时，由于

$$0\leqslant\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

由两边夹定理知，原极限 $=0$.

(4) 由平均值不等式，有

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{x^4}{2}+\frac{x^4}{2}+y^8}{3}\geqslant\frac{1}{\sqrt[3]{4}}|xy|^{\frac{8}{3}},$$

即

$$\frac{|xy|^{\frac{8}{3}}}{x^4+y^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{4}}{3}.$$

于是，有

$$0\leqslant\left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right|=\frac{|xy|^{\frac{8}{3}}}{x^4+y^8}\cdot|xy|^{\frac{1}{3}}\leqslant\frac{\sqrt[3]{4}}{3}|xy|^{\frac{1}{3}}.$$

由两边夹定理知，原极限 $=0$.

例 6.6　设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$k>1$，

$$D_1=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{k}x\leqslant y\leqslant kx\right\},D_2=\{(x,y)\,|\,x>0,y>0\}.$$

试分别讨论 $i=1,2$ 时,极限 $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_i}} f(x,y)$ 是否存在?为什么?

解 在 D_1 上,由 $r=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant\sqrt{1+k^2}\,|x|$ 可知,当 $r\to+\infty$ 时,$x\to\infty$. 又由 $y\geqslant\frac{1}{k}x$ 知,此时还有 $y\to\infty$. 故

$$\lim_{\substack{r\to+\infty\\(x,y)\in D_1}} f(x,y)=0.$$

在 D_2 上,$\lim\limits_{r\to+\infty} f(x,y)$ 不存在. 事实上,

若取 $x_n=n,y_n=\frac{1}{n}$,则 $r_n=\sqrt{n^2+\frac{1}{n^2}}\to+\infty$ $(n\to\infty)$,而 $f(x_n,y_n)=1$,故

$$\lim_{\substack{r_n\to+\infty\\(x_n,y_n)\in D_2}} f(x_n,y_n)=1;$$

若取 $x'_n=y'_n=n$,则 $r'_n=\sqrt{n^2+n^2}\to+\infty$ $(n\to\infty)$,而 $f(x'_n,y'_n)=\frac{1}{n^2}$,故 $\lim\limits_{\substack{r'_n\to+\infty\\(x'_n,y'_n)\in D_2}} f(x'_n,y'_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$. 由此可见,所论极限不存在.

类题 设 $f(x,y)=\frac{xy}{x+y}$. 讨论:

(1)当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 f 在其定义域上是否有极限?

(2)当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 f 在集合 $D=\{(x,y)\,|\,xy\geqslant0,(x,y)\neq(0,0)\}$ 上是否有极限?

提示 (1)没有极限. 取 $y=x,y=-x+x^2$ 两条路径.

(2)极限为 0.

例 6.7 讨论下列函数的连续性.

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin xy}{y}, & y\neq0,\\ 0, & y=0;\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}0, & x\text{ 为无理数},\\ y, & x\text{ 为有理数}.\end{cases}$

解 (1)当 $y\neq0$ 时,$f(x,y)$ 显然连续.

当 $y=0$ 时,由 $\left|\dfrac{\sin xy}{y}\right|\leqslant|x|$ 知,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续. $\forall x_0\in\mathbf{R}$,且 $x_0\neq0$ 由 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=x_0\neq f(x_0,0)$ 知,$f(x,y)$ 在点 $(x_0,0)$ $(x_0\neq0)$ 不连续.

(2) $\forall(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$,则

当 x_0 为有理数时,$f(x_0,y_0)=y_0$,那么

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=\begin{cases}|y-y_0|, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ |y_0|, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

当 x_0 为无理数时，$f(x_0,y_0)=0$，那么

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=\begin{cases}|y|, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}.\end{cases}$$

由此可见，欲使 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，当且仅当 $y_0=0$，故 $f(x,y)$ 仅在 $D=\{(x,0)\mid x\in\mathbf{R}\}$ 上连续.

例 6.8　设 $f(x,y)$ 是区域 D：$|x|\leqslant 1$，$|y|\leqslant 1$ 上的有界 k 次齐次函数（$k\geqslant 1$）. 证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\{f(x,y)-(x-1)\mathrm{e}^y\}$ 存在，并求其值（南京大学）.

证明　由 $f(x,y)=x^k f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)=y^k f\left(\dfrac{x}{y},1\right)$ 及题设知，

当 $|y|\leqslant|x|$ 时，$\left|f\left(1,\dfrac{y}{x}\right)\right|\leqslant M$；

当 $|x|\leqslant|y|$ 时，$\left|f\left(\dfrac{x}{y},1\right)\right|\leqslant M$，

其中，$M=\sup\limits_{\substack{|x|\leqslant 1\\ |y|\leqslant 1}}|f(x,y)|$. 于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\sqrt[k]{\varepsilon}>0$，当 $|x|<\sqrt[k]{\varepsilon}$，$|y|<\sqrt[k]{\varepsilon}$，且 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有

$$|f(x,y)|<M\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\{f(x,y)-(x-1)\mathrm{e}^y\}=1.$$

例 6.9　设 $f(x,y,z)$ 在 $a\leqslant x,y,z\leqslant b$ 上连续. 令

$$\varphi(x)=\max_{a\leqslant y\leqslant x}\min_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续（辽宁师大）.

证明　分成两步来证.

(1) 记

$$\psi(x,y)=\min_{a\leqslant z\leqslant b} f(x,y,z),\ a\leqslant x,y\leqslant b.$$

因为 $f(x,y,z)$ 在有界闭区域上连续，所以一致连续. 于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，$\forall z\in[a,b]$ 时，有

$$f(x_0,y_0,z)-\varepsilon<f(x,y,z)<f(x_0,y_0,z)+\varepsilon.$$

对 z 在 $[a,b]$ 上取最小值得

$$\psi(x_0,y_0)-\varepsilon<\psi(x,y)<\psi(x_0,y_0)+\varepsilon.$$

由此知，$\psi(x,y)$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续.

(2)令 $y = a + k(x-a)$,其中 $0 \leqslant k \leqslant 1$,则

$$\varphi(x) = \max_{a\leqslant y\leqslant x}\psi(x,y) = \max_{0\leqslant k\leqslant 1}\psi(x,a+k(x-a)).$$

由 ψ 在 $\{a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant y \leqslant x\}$ 上连续知,$\psi(x,a+k(x-a))$ 在 $\{a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant k \leqslant 1\}$ 上连续,用与(1)中相同的方法可证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

类题 设 f 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上连续,定义

$$\varphi(x) = \max_{a\leqslant\xi\leqslant x}\max_{a\leqslant y\leqslant\xi} f(\xi,y),$$

证明:$\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

提示 由 $\max\limits_{a\leqslant y\leqslant\xi} f(\xi,y) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant 1} f(\xi,a+k(\xi-a))$,利用例 6.9 的方法可以证明 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

例 6.10 证明命题 6.2(2).

证明 $\forall (x_0,y_0)\in D$. 由 $f(x,y)$ 关于 y 的连续性知,$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$,当 $|y-y_0| \leqslant \delta_1$ 时,有

$$|f(x_0,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

特别地,有

$$|f(x_0,y_0+\delta_1) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon,$$
$$|f(x_0,y_0-\delta_1) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon.$$

又由 $f(x,y)$ 关于 x 的连续性知,$\exists \delta_2 > 0$,当 $|x-x_0| < \delta_2$ 时,有

$$|f(x,y_0+\delta_1) - f(x_0,y_0+\delta_1)| < \varepsilon,$$
$$|f(x,y_0-\delta_1) - f(x_0,y_0-\delta_1)| < \varepsilon.$$

于是有

$$\begin{aligned}&|f(x,y_0\pm\delta_1) - f(x_0,y_0)|\\ &\leqslant |f(x,y_0\pm\delta_1) - f(x_0,y_0\pm\delta_1)| + |f(x_0,y_0\pm\delta_1) - f(x_0,y_0)| < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

从而,取 $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\} > 0$,当 $|x-x_0| < \delta, |y-y_0| \leqslant \delta$ 时,利用 $f(x,y)$ 关于 y 的单调性,可得

$$\begin{aligned}&|f(x,y) - f(x_0,y_0)|\\ &\leqslant \max\{|f(x,y_0+\delta_1) - f(x_0,y_0)|, |f(x,y_0-\delta_1) - f(x_0,y_0)|\} < 2\varepsilon.\end{aligned}$$

这就证明了 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 点连续,由 (x_0,y_0) 的任意性知,$f(x,y)$ 在 D 上连续.

注 6.1 该题的结论,可推广到 $\mathbf{R}^n$:设 f 在 $\mathbf{R}^n$(或 $D\subset\mathbf{R}^n$)上关于每一个变元都连续,且固定一个变元关于其余的 $n-1$ 个变元都单调,则 f 在 $\mathbf{R}^n$(或 $D\subset\mathbf{R}^n$)上连续.

例 6.11 设 $f(x,y,z)$ 在 $[a,+\infty)\times[b,+\infty)\times[c,+\infty)$ 上连续且无下界,对任意的 $s\in\mathbf{R}$,$f(x,y,z) = s$ 的解集为有界集. 证明:

$$\lim_{(x,y,z)\to(+\infty,+\infty,+\infty)} f(x,y,z) = -\infty$$ (华东师大).

证明　因为f连续且无下界,所以$\forall n \in \mathbf{N}_+$,相应地存在点列$P_n = (x_n, y_n, z_n) \in \Omega \triangleq [a, +\infty) \times [b, +\infty) \times [c, +\infty)$,使得$f(P_n) < -n$.

事实上,$\{P_n\}$是无界点列. 若不然,由致密性定理,它存在收敛子例,仍记为$\{P_n\}$,设$P_n \to P_0 \in \Omega (n \to \infty)$. 由此可知,$f(P_0) = -\infty$. 这与$f$的连续性相矛盾.

由上可以断定,当$(x,y,z) \to (+\infty, +\infty, +\infty)$时,$f(x,y,z)$或者无极限,或者趋向于$-\infty$.

下面证明$f(x,y,z)$无极限不会发生. 若不然,则存在点列$(x_n', y_n', z_n') \to (+\infty, +\infty, +\infty)$,使得$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n', y_n', z_n') = A \neq -\infty$. 由$f$的连续性,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists N > 0$,当$n > N$时,有

$$A - \varepsilon < f(x_n', y_n', z_n') < A + \varepsilon. \tag{1}$$

注意到$K = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = A\}$是有界集,存在适当大的$r > 0$,使得

$$K \subset Q = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2\} \cap \Omega. \tag{2}$$

记$Q^* = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4r^2\} \cap \Omega$,由式(1)、式(2)可知,当$n$充分大时,$(x_n', y_n', z_n') \in Q^*$,这与$(x_n', y_n', z_n') \to (+\infty, +\infty, +\infty)$相矛盾. 因此,必有

$$\lim_{(x,y,z)\to(+\infty,+\infty,+\infty)} f(x,y,z) = -\infty$$

成立.

例 6.12　设$D \subset \mathbf{R}^2$,证明:二元函数f在D上一致连续的充要条件是:对D的每一对点列$\{P_n\}$,$\{Q_n\}$,只要$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(P_n, Q_n) = 0$,就有

$$\lim_{n\to\infty} (f(P_n) - f(Q_n)) = 0.$$

证明　($\Rightarrow$)由f在D上的一致连续性知,$\forall \varepsilon > 0$,$\exists \delta > 0$,$\forall P, Q \in D$,只要$\operatorname{diam}(P,Q) < \delta$,就有

$$|f(P) - f(Q)| < \varepsilon.$$

对上述$\delta > 0$,由$\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(P_n, Q_n) = 0$,$\exists N > 0$,当$n > N$时,有$\operatorname{diam}(P_n, Q_n) < \delta$,从而有

$$|f(P_n) - f(Q_n)| < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} (f(P_n) - f(Q_n)) = 0.$$

($\Leftarrow$)用反证法. 假设f在D上不一致连续,即$\exists \varepsilon_0 > 0$,$\forall \delta > 0$,$\exists P', Q' \in D$,尽管$\operatorname{diam}(P', Q') < \delta$,但$|f(P') - f(Q')| \geqslant \varepsilon_0$.

取$\delta_n = \dfrac{1}{n} > 0$,相应地存在一对点列$P'_n, Q'_n \in D$,$n = 1, 2, \cdots$,满足$\operatorname{diam}(P'_n, Q'_n) < \dfrac{1}{n}$,但$|f(P'_n) - f(Q'_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

这样就得到一对点列 $\{P'_n\}$，$\{Q'_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{diam}(P'_n,Q'_n)=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(P'_n)-f(Q'_n))\neq 0$. 这与已知条件矛盾.

注 6.2 这个例题的结论，常用来判断多元函数 f 在某个点集 D 上的不一致连续性.

例如，证明：$f(x,y)=\dfrac{1}{1-xy}$ 在 $D=[0,1)\times[0,1)$ 上不一致连续.

事实上，取一对点列 $P_n\left(\dfrac{n}{n+1},\dfrac{n}{n+1}\right),Q_n\left(\dfrac{n-1}{n},\dfrac{n-1}{n}\right)$，显然 $P_n,Q_n\in D$，且 $\operatorname{diam}(P_n,Q_n)\to 0(n\to\infty)$，但 $f(P_n)-f(Q_n)\to\dfrac{3}{4}\neq 0(n\to\infty)$.

又如，证明：$f(x,y)=\sin xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上不一致连续.

取 $P_n(\sqrt{n\pi},\sqrt{n\pi}),Q_n\left(\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}},\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)$，易知，$\operatorname{diam}(P_n,Q_n)\to 0(n\to\infty)$，但 $f(P_n)-f(Q_n)=-1\neq 0(n\to\infty)$.

例 6.13 设 $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 是连续映射，若对 $\mathbf{R}^2$ 中的任何有界闭集 K，$f^{-1}(K)$ 均有界. 证明：$f(\mathbf{R}^2)$ 是闭集（兰大）.

证明 任取点列 $\{Q_n\}\subset f(\mathbf{R}^2)$，并设 $Q_n\to Q_0(n\to\infty)$，欲证 $f(\mathbf{R}^2)$ 是闭集，只需证明 $Q_0\in f(\mathbf{R}^2)$ 即可.

事实上，由 f 是 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 的映射知，对每一个 Q_n，相应地存在 $P_n\in\mathbf{R}^2$，使得 $f(P_n)=Q_n$. 记 $B(Q_0;1)=\{Q\in f(\mathbf{R}^2)\mid |Q-Q_0|\leqslant 1\}\subset\mathbf{R}^2$，显然它是有界闭集.

由 $Q_n\to Q_0(n\to\infty)$ 可知，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$Q_n\in B(Q_0;1)\subset\mathbf{R}^2$，相应地 $P_n\in f^{-1}(B(Q_0;1))(n>N)$. 由已知条件，$f^{-1}(B(Q_0;1))$ 是有界集，所以 $\{P_n\}_{n>N}$ 是有界点列. 由致密性定理，$\{P_n\}_{n>N}$ 存在收敛子列 $\{P_{n_k}\}_{n_k>N}$ 满足 $P_{n_k}\to P_0\in\mathbf{R}^2(k\to\infty)$.

再由 $f(P_{n_k})=Q_{n_k}$ 及 f 的连续性，令 $k\to\infty$，可得：$f(P_0)=Q_0$. 注意到 $P_0\in\mathbf{R}^2$，故 $Q_0\in f(\mathbf{R}^2)$.

例 6.14 设 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，满足：

（1）当 $\boldsymbol{x}\neq 0$ 时，$f(\boldsymbol{x})>0$；

（2）对任意的 $\boldsymbol{x}$ 和正常数 c，$f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$，

求证：存在 $a>0,b>0$，使得 $a|\boldsymbol{x}|\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|$.

证明 根据 f 的性质，要证的结论可改写成

$$a\leqslant f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\leqslant b,\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}.$$

考虑 $\mathbf{R}^n$ 中的单位球面 $S=\{\boldsymbol{x}\mid|\boldsymbol{x}|=1\}$，它是有界闭集. 由于 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上连续，所以它在 S 上必取到最大值和最小值，即存在 $\boldsymbol{x}_1\in S$ 和 $\boldsymbol{x}_2\in S$，使 $f(\boldsymbol{x}_1)$ 和

$f(\boldsymbol{x}_2)$ 分别为 $f(\boldsymbol{x})$ 在 S 上的最大值和最小值. 注意到 $f(\boldsymbol{x}) > 0(\boldsymbol{x} \neq 0)$，所以 $b = f(\boldsymbol{x}_1) > 0, a = f(\boldsymbol{x}_2) > 0$.

于是，$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \backslash \{0\}, \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|} \in S$，从而有

$$a \leqslant f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) \leqslant b,$$

或

$$a|\boldsymbol{x}| \leqslant f(\boldsymbol{x}) \leqslant b|\boldsymbol{x}|, \forall \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n.$$

二、多元函数的偏导数与全微分

1. 偏导数的计算

在对一个变元求偏导数时，将其余的变元看做常数，即

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x,b)\right)\Big|_{x=a}.$$

求分段函数在分段点处的偏导数，要用定义.

需要注意的是，函数在一点的偏导数反映的是函数在该点沿某个坐标轴的变化，而不是反映在该点的全面变化（全微分才是反映函数在该点的全面变化）.

2. 方向导数

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 $D \subset \mathbf{R}^2$ 中的一定点，$\boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ 为一个方向. 如果极限

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{f(x_0 + \rho\cos\alpha, y_0 + \rho\sin\alpha) - f(x_0,y_0)}{\rho}$$

存在，则称该极限为 f 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0)$.

由于 x 轴和 y 轴的正向分别为 $\boldsymbol{e}_1 = (1,0)$ 和 $\boldsymbol{e}_2 = (0,1)$，所以 f 在点 P_0 关于 x（或 y）可偏导的充要条件是 f 沿 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $-\boldsymbol{e}_1$（或者 $\boldsymbol{e}_2$ 和 $-\boldsymbol{e}_2$）的方向导数存在且为相反数.

例如，求 $f(x,y) = \begin{cases} |x^2 - y^2|^{\frac{1}{2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$ 在原点的方向导数，并判断 f 在原点 $(0,0)$ 的偏导数是否存在.

$\forall \boldsymbol{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$，由定义

$$\frac{f(0 + \rho\cos\alpha, 0 + \rho\sin\alpha) - f(0,0)}{\rho} = \frac{|\rho|}{\rho}|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}.$$

当 $\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$ 时，上式为零，因此 f 沿这样的方向的方向导数为零.

当 $\cos^2\alpha \neq \sin^2\alpha$ 时，而 $\rho \to 0^+$，上式的极限为 $|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}$，即 f 沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数为 $|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}$. 同样可计算出，$f$ 沿 $-\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数也为

$|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha|^{\frac{1}{2}}$.

特别地,f 沿方向 $\boldsymbol{e}_i$ 和 $-\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$ 的方向导数均为 1,因此 f 在原点(0,0)的偏导数不存在.

3. 全微分

设 $P_0(x_0,y_0)\in D\subset\mathbf{R}^2$,给自变量 x 和 y 增量 $\Delta x,\Delta y$,相应地可得到函数值的增量 Δz. 当 $\rho\to 0$ 时,若 Δz 可表示为如下形式:

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) \qquad (\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

其中,A,B 是与 $\Delta x,\Delta y$ 无关而与 x_0,y_0 有关的常数,则称 f 在点 P_0 可微,并把其线性主部 $A\Delta x + B\Delta y$ 称为 f 在点 P_0 的全微分,记为 $\mathrm{d}z|_{P_0}$ 或 $\mathrm{d}f(x_0,y_0)$. 习惯上写成:$\mathrm{d}z|_{P_0} = A|_{P_0}\mathrm{d}x + B|_{P_0}\mathrm{d}y$.

从定义可以看出,如果函数 f 在点 P_0 可微,则在 P_0 附近有

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \approx f(x_0,y_0) + A\Delta x + B\Delta y.$$

因此可微的意义在于在点 P_0 附近 f 可用一个 Δx 和 Δy 的线性函数来逼近.

全微分的性质:

(1)若 f 在点 (x_0,y_0) 可微,则 $A = f_x(x_0,y_0), B = f_y(x_0,y_0)$. 这样,全微分公式可以写成:$\mathrm{d}f|_{P_0} = f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y$. 若不特指某一点,则可写成:

$$\mathrm{d}f = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y;$$

(2)若 f 在点 (x_0,y_0) 可微,则 f 在点 (x_0,y_0) 连续;

(3)若 f 在点 (x_0,y_0) 可微,则对 $\forall \boldsymbol{l} = (\cos\alpha,\sin\alpha)$,$f$ 在点 (x_0,y_0) 沿 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在,且

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\sin\alpha.$$

另外,多元函数的微分也具有一阶形式的不变性,利用这个性质可求函数的偏导数.

证明函数 f 在点 (x_0,y_0) 不可微常用的方法:1)证明 f 在点 (x_0,y_0) 至少有一个偏导数不存在;2)证明 f 在点 (x_0,y_0) 不连续;3)从定义出发,证明

$$\Delta f - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y \neq o(\rho)(\rho\to 0).$$

多元函数的连续性、可偏导性以及可微性之间的关系如图 6-1 所示.

由此可见,仅由偏导数存在是推不出连续的,这一点与一元函数有着本质的区别.

由连续性也推不出偏导数存在,考虑函数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在点(0,0).

方向导数与连续性之间也不存在蕴含关系. 例如

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < x^2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

在点(0,0)沿任何方向的方向导数都存在且为 0,但该函数在点(0,0)无极限,当

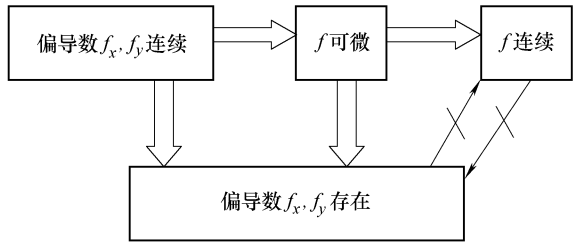


图 6-1　多元函数的连续性、可偏导性以及可微性之间的关系

然也不连续. 又如,

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在原点连续,但它沿任何方向的方向导数都不存在.

4. 梯度

设 $P_0(x_0,y_0)\in D\subset\mathbf{R}^2$,若 $f(x,y)$ 在点 P_0 可偏导,则称向量 $(f_x(x_0,y_0),\ f_y(x_0,y_0))$ 为 f 在点 P_0 的梯度,记为 $\mathbf{grad}\,f(P_0)$ 或 $\nabla f(P_0)$.

若 f 在点 P_0 可微,则方向导数有另一种表达式:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\nabla f\cdot\boldsymbol{l}=\|\nabla f\|\cos\theta\quad(\|\boldsymbol{l}\|=1),$$

其中,θ 是梯度与 $\boldsymbol{l}$ 的夹角.

由此可见,当 $\cos\theta=1$,即沿着梯度方向,方向导数达到最大值 $\|\nabla f\|$. 也就是说,沿着梯度方向函数值增加得最快;当 $\cos\theta=-1$,即沿着梯度的反方向,方向导数达到最小值 $-\|\nabla f\|$. 也就是说,沿着梯度的反方向函数值减少得最快.

例如,设 $f(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$,$a>b>0$. 在上半平面 $y\geqslant 0$ 上指出函数值增加最快的方向.

由于在梯度不为零时,梯度方向就是函数值增加最快的方向,所以对 $(x,y)\neq(0,0)$,方向 $\nabla f=\left(\dfrac{2x}{a^2},\dfrac{2y}{b^2}\right)$ 就是函数值增加最快的方向.

而在原点处,梯度为零向量,这需要用其他方法.

由于

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(0,0)&=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\\&=\frac{1}{b^2}(x^2+y^2)-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)x^2,\end{aligned}$$

因此,在以原点为中心的任意小圆周上,当 $x = 0$ 时,函数值增加最快. 也就是说,沿 y 轴方向函数值增加最快.

5. 复合函数求偏导的链式法则

对链式公式,不必去死记硬背. 对具体题目只要搞清楚它的复合层次,相应地链式公式就不难写出来. 但需要注意链式公式成立的条件,即外层函数可微(这一点一般是成立的,对分段函数要注意检验就可以了).

例 6.15 设函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{当 } x^2+y^2 \neq 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } x^2+y^2 = 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

其中,$p \in \mathbf{N}_+$. 问:

(1)对于 p 的哪些值,$f(x,y)$ 在原点连续?

(2)对于 p 的哪些值,$f_x(0,0)$ 与 $f_y(0,0)$ 都存在?

(3)对于 p 的哪些值,$f(x,y)$ 在原点有一阶连续偏导数?并给出证明.

(中山大学).

解 (1)由 $0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant |x+y|^p \leqslant (|x|+|y|)^p$ 可知,当 $p \in \mathbf{N}_+$ 且 $p \geqslant 1$ 时,有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$,即 $f(x,y)$ 在原点连续.

$$(2)\ f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^p \sin\dfrac{1}{|\Delta x|}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{p-1}\sin\frac{1}{|\Delta x|},$$

欲使上式极限存在,必须有 $p \geqslant 2$. 此时,$f_x(0,0) = 0$.

同理可知,当 $p \geqslant 2$ 时,$f_y(0,0) = 0$.

(3)由(2)知,当 $p \geqslant 2$ 时,有

$$f_x(x,y) = \begin{cases} p(x+y)^{p-1}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \\ \qquad x(x+y)^p \dfrac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

而

$$0 \leqslant |f_x(x,y)| \leqslant p|x+y|^{p-1} + \frac{|x|\cdot|x+y|^p}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\leqslant p(|x|+|y|)^{p-1} + \frac{(|x|+|y|)^{p+1}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, (p \geqslant 2).$$

显然,上式右端第一项的极限为0,而欲使第二项的极限为0,必须让 $p \geqslant 3$ (对此可作极坐标变换). 于是当 $p \geqslant 3$ 且 $p \in \mathbf{N}_+$ 时, $f_x(x,y)$ 在原点连续. 同理可证,当 $p \geqslant 3$ 且 $p \in \mathbf{N}_+$ 时, $f_y(x,y)$ 在原点也连续.

例 6.16　设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (a\sqrt{|x|} + x^2 + y^2 + b)\dfrac{\sin xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

在点(0,0)可微,求常数 a,b 的值

解　先用定义求 $f(x,y)$ 在点(0,0)的偏导数.

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0.$$

同理可得: $f_y(0,0) = 0$.

由 $f(x,y)$ 在点(0,0)可微知, $f(x,y)$ 在点(0,0)连续,而且

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\rho} = 0, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2}.$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[(a\sqrt{|x|} + x^2 + y^2 + b)\frac{\sin xy^2}{x^2+y^4}\right] = 0, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\rho} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\rho} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{a\sqrt{|x|}x^2+y^2+b}{\rho}\cdot\frac{\sin xy^2}{x^2+y^4}\right) = 0. \end{aligned}\tag{2}$$

由式(1)可知

$$0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\left[(a|y| + y^4 + y^2 + b)\frac{\sin y^4}{2y^4}\right] = \frac{1}{2}b,$$

即 $b = 0$.

由式(2)和 $b = 0$,有

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=y^2}}\left(\frac{a|y| + y^4 + y^2}{\sqrt{y^4+y^2}}\cdot\frac{\sin y^4}{2y^4}\right) \\ &= \lim_{y\to 0}\left(\frac{a|y| + y^4 + y^2}{|y|\sqrt{y^2+1}}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}a, \end{aligned}$$

故 $a = 0$.

例 6.17　设二元函数 $f(x,y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x,y), f_{yx}(x,y)$ 在(0,0)点附近存在,且 $f_{xy}(x,y)$ 在(0,0)点连续. 证明: $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$ (浙大).

证明　记 $I = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0+\Delta y) - f(0+\Delta x,0) + f(0,0)$,

$$\varphi(x)=f(x,0+\Delta y)-f(x,0),\phi(y)=f(0+\Delta x,y)-f(0,y),$$

则 $I=\varphi(0+\Delta x)-\varphi(0)$ 和 $I=\phi(0+\Delta y)-\phi(0)$.

一方面,

$$\begin{aligned}I&=\varphi'(0+\theta_1\Delta x)\Delta x\\&=[f_x(0+\theta_1\Delta x,0+\Delta y)-f_x(0+\theta_1\Delta x,0)]\Delta x\\&=f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y\quad(0<\theta_1,\theta_2<1);\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}I&=\phi'(0+\theta_3\Delta y)\Delta y\\&=[f_y(0,\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)]\Delta y\quad(0<\theta_3<1).\end{aligned}$$

由上面两式,有

$$\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y).$$

由 $f_{xy}(x,y)$ 在(0,0)点的连续性,可知

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}f_{xy}(0+\theta_1\Delta x,0+\theta_2\Delta y)=f_{xy}(0,0).$$

于是,有

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f_y(0+\Delta x,0+\theta_3\Delta y)-f_y(0,0+\theta_3\Delta y)}{\Delta x}=f_{xy}(0,0).$$

特别地,当 $(\Delta x,\Delta y)$ 沿着直线 $\Delta y=0$ 趋向于(0,0)时,有

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=f_{yx}(0,0)=f_{xy}(0,0).$$

本题给出了较弱条件下,两个混合偏导数可交换的结论. 下列也属于这类问题.

例 6.18 设 f_x,f_y 在(0,0)点附近存在,且在(0,0)点可微,证明:

$$f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0).$$

证明 因为 f_x,f_y 在(0,0)点可微,所以 $f_{xx}(0,0),f_{xy}(0,0),f_{yx}(0,0),f_{yy}(0,0)$ 都存在.

下证:两个混合偏导数相等. 由于

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f_y(0+\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x},$$

$$f_y(0+\Delta x,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0+\Delta x,0)}{\Delta y},$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y},$$

因此

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0+\Delta x,0)-f(0,0+\Delta y)+f(0,0)}{\Delta x\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}[f_x(0+\theta_1\Delta x,0+\Delta y)] - f_x(0+\theta_1\Delta x,0)], \tag{1}$$

其中 $0<\theta_1<1$.

注意到 f_x 在 $(0,0)$ 点可微,我们有

$$f_x(0+\theta_1\Delta x,0+\Delta y) = f_x(0,0) + f_{xx}(0,0)\theta_1\Delta x + f_{xy}(0,0)\Delta y + \alpha_1\theta_1\Delta x + \alpha_2\Delta y, \tag{2}$$

和

$$f_x(0+\theta_1\Delta x,0) = f_x(0,0) + f_{xx}(0,0)\theta_1\Delta x + \alpha_3\theta_1\Delta x, \tag{3}$$

其中 α_1,α_2 是 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时的无穷小量,α_3 是 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量.

将式(2)、式(3)两式代入式(1)可得

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}[f_{xy}(0,0)\Delta y + \alpha_1\theta_1\Delta x + \alpha_2\Delta y - \alpha_3\theta_1\Delta x] \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\left[f_{xy}(0,0) + \alpha_1\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y} + \alpha_2 - \alpha_3\theta_1\frac{\Delta x}{\Delta y}\right]. \end{aligned}$$

令 $\Delta y=\Delta x\to 0$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\to 0$,故有 $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$.

例 6.19　设 $u(x,y)$ 的所有二阶偏导数都连续,并且 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. 已知 $u(x,2x) = x, u_x(x,2x) = x^2$. 试求:$u_{xx}(x,2x), u_{xy}(x,2x), u_{yy}(x,2x)$(南开).

解　对 $u(x,2x) = x$ 两边关于 x 求导

$$u_x(x,2x) + 2u_y(x,2x) = 1.$$

由 $u_x(x,2x) = x^2$ 可得

$$u_y(x,2x) = \frac{1}{2}(1-x^2).$$

在上式中,两边关于 x 求导可得

$$u_{yx}(x,2x) + 2u_{yy}(x,2x) = -x. \tag{1}$$

对 $u_x(x,2x) = x^2$ 两边关于 x 求导可得

$$u_{xx}(x,2x) + 2u_{xy}(x,2x) = 2x. \tag{2}$$

利用 $u_{xx} = u_{yy}, u_{xy} = u_{yx}$,联系式(1)、式(2)求解可得

$$u_{xx}(x,2x) = u_{yy}(x,2x) = -\frac{4}{3}x, u_{xy}(x,2x) = \frac{5}{3}x.$$

类题 1　设 $a,b\neq 0$,f 具有二阶连续偏导数,且 $a^2f_{xx} + b^2f_{yy} = 0$,$f(ax,bx) = ax$,$f_x(ax,bx) = bx^2$. 试求 $f_{xx}(ax,bx), f_{xy}(ax,bx), f_{yy}(ax,bx)$.

类题 2　设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有连续偏导数,且 $f(x,x^2) = 1$.

(1)若 $f_x(x,x^2) = x$,求 $f_y(x,x^2)$;

(2)若 $f_y(x,y) = x^2 + 2y$,求 $f(x,y)$.

提示 (2)对$f_y(x,y)=x^2+2y$两边关于y积分可得

$$f(x,y)=x^2y+y^2+\varphi(x).$$

由$f(x,x^2)=1$可得：$2x^4+\varphi(x)=1$,即$\varphi(x)=1-2x^4$.

故 $$f(x,y)=x^2y+y^2+1-2x^4.$$

下面的例题是关于齐次函数的.

定义 若函数$f(x,y)$满足$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$ $(t>0)$,则称f是n次**齐次函数**.

例 6.20 设f具有连续偏导数,则f是n次齐次函数的充要条件是：

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf.$$

证明 ($\Rightarrow$)对等式$f(tx,ty)=t^nf(x,y)$两边关于t求导,并令$t=1$即可.

($\Leftarrow$)令$\varphi(t)=\dfrac{f(tx,ty)}{t^n}$ $(t>0)$. 若能证明$\varphi'(t)\equiv 0$,就可说明$\varphi(t)$与t无关. 这样就有$\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y)$,从而充分性得证.

而

$$\begin{aligned}\varphi'(t)&=\frac{t^n[xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)]-nt^{n-1}f(tx,ty)}{t^{2n}}\\&=\frac{(tx)f_x(tx,ty)+(ty)f_y(tx,ty)-nf(tx,ty)}{t^{n+1}}\\&=0\quad\text{(由充分性的条件).}\end{aligned}$$

齐次函数有如下重要的性质：

命题 6.3 若$f(x,y)$是n次齐次函数,则

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f=n(n-1)\cdots(n-m+1)f.$$

命题 6.4 若$f(x,y)$是n次齐次函数,则$f_x(x,y)$,$f_y(x,y)$是$(n-1)$次齐次函数.

这些命题的证明是简单的,请同学们予以证明.

例 6.21 证明：$z=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)+x^{-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$满足下面的方程

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=n^2z,$$

其中,φ,ψ均二阶连续可微(南京大学).

证明 记$u=x^n\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,$v=x^{-n}\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则$u$是$n$次齐次函数,$v$是$-n$次齐次函数. 于是有

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)u=nu,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)v=-nv,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u=n(n-1)u,$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2v=n(n+1)v.$$

从而

$$\begin{aligned}&x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}+x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}\\=&\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2z+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)z\\=&\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2(u+v)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)(u+v)\\=&n(n-1)u+n(n+1)v+nu-nv\\=&n^2(u+v)=n^2z.\end{aligned}$$

类题　设 $z=xf(u)+g(u)$，$u=\dfrac{y}{x}$，且 $f(u)$ 及 $g(u)$ 二阶可导，试计算式子

$$A=x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}.$$

（清华）.

例 6.22　设曲面 $z=f(x,y)$ 二次可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\geqslant m>0$. 证明：对任给的常数 c，$f(x,y)=c$ 为一条直线的充要条件是：

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\frac{\partial^2f}{\partial x^2}-2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2f}{\partial y^2}=0.$$

（华中工学院）.

证明　$\forall c$，$f(x,y)=c$ 为一条直线即由 $f(x,y)=c$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在 xOy 平面上表示一条直线. 显然，$y=y(x)$ 是一条直线$\Leftrightarrow\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=0$. 而

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial f}{\partial y}$. 故

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=-\left[\left(\frac{\partial^2f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial^2f}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\right]\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\\&=-\left[\frac{\partial^2f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2f}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2f}{\partial y^2}\right]\Big/\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^3.\end{aligned}$$

由此可见，命题成立.

例 6.23　设 $f(x,y)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 上的可微函数，且有

$$\lim_{r\to+\infty}(xf_x+yf_y)=\alpha>0, r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

试证明：$f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有最小值.

证明 因为 $\lim\limits_{r\to+\infty}(xf_x+yf_y)=\alpha>0$，所以 $\exists r_0>0$，当 $r\geqslant r_0$ 时，有

$$xf_x+yf_y>\frac{\alpha}{2}>0.$$

又由于

$$\frac{1}{r}(xf_x+yf_y)=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta=\frac{\partial f}{\partial r}$$

是沿半径方向的方向导数，因此当 $r\geqslant r_0$ 时，也有 $\dfrac{\partial f}{\partial r}>0$，即 f 沿 r 方向递增. 于是，$\forall P(x,y)\in\mathbf{R}^2$，当 $r=\sqrt{x^2+y^2}>r_0$ 时，都有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$. 这表明 f 在圆 $r=r_0$ 以外各点的值总是大于该圆上某一点处的值. 所以在 $\mathbf{R}^2$ 上 f 若有最小值必在 $r\leqslant r_0$ 上达到.

由 f 可微知，f 连续. 根据连续函数在有界闭域上的性质知，f 必有最小值，且在圆域 $r\leqslant r_0$ 上达到.

例 6.24 设 $f(x,y)$ 在区域 $D\subset\mathbf{R}^n$ 上可微，$\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$ 是两个给定的方向，它们之间的夹角为 $\varphi(0<\varphi<\pi)$. 证明：

$$(f_x)^2+(f_y)^2\leqslant\frac{2}{\sin^2\varphi}[(f_{l_1})^2+(f_{l_2})^2].$$

证明 设 $\boldsymbol{l}_1$ 与 x 轴正方向的夹角为 θ，则 $\boldsymbol{l}_2$ 与 x 轴正方向的夹角为 $\theta+\varphi$. 由 f 的可微性，有

$$\begin{cases}f_{l_1}=f_x\cos\theta+f_y\sin\theta,\\ f_{l_2}=f_x\cos(\theta+\varphi)+f_y\sin(\theta+\varphi).\end{cases}$$

解之可得

$$f_x=\frac{1}{\sin\varphi}(f_{l_1}\sin(\theta+\varphi)-f_{l_2}\sin\theta),$$

$$f_y=\frac{1}{\sin\varphi}(-f_{l_1}\cos(\theta+\varphi)+f_{l_2}\cos\theta).$$

于是有

$$\begin{aligned}(f_x)^2+(f_y)^2&=\frac{1}{\sin^2\varphi}((f_{l_1})^2+(f_{l_2})^2-2f_{l_1}f_{l_2}\cos\varphi)\\&\leqslant\frac{1}{\sin^2\varphi}[(f_{l_1})^2+(f_{l_2})^2+2|f_{l_1}|\cdot|f_{l_2}|]\\&\leqslant\frac{2}{\sin^2\varphi}[(f_{l_1})^2+(f_{l_2})^2].\end{aligned}$$

例 6.25　若函数 $u = u(x,y)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$，证明：函数 $v = u\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足这个方程(河南大学).

证明　设 $\xi = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \eta = \dfrac{y}{x^2+y^2}$，则 $v(x,y) = u(\xi,\eta)$.

而由

$$\xi_x = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} = -\eta_y, \qquad \xi_y = -\frac{2xy}{x^2+y^2} = \eta_x,$$

$$\xi_{yy} = (\xi_y)_y = (\eta_x)_y = (\eta_y)_x = -\xi_{xx},$$

$$\eta_{yy} = (\eta_y)_y = (-\xi_x)_y = -(\xi_y)_x = -\eta_{xx}$$

及

$$v_{xx} = u_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + u_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx},$$

$$v_{yy} = u_{\xi\xi} \cdot (\xi_y)^2 + u_{\eta\eta} \cdot (\eta_y)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_y\eta_y + u_\xi \cdot \xi_{yy} + u_\eta \cdot \eta_{yy}.$$

注意到 $u_{\xi\xi}(\xi,\eta) + u_{\eta\eta}(\xi,\eta) = 0$，有

$$\begin{aligned}\Delta v &= v_{xx} + v_{yy}\\ &= u_{\xi\xi} \cdot (\xi_x)^2 + u_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \xi_x\eta_x + u_\xi \cdot \xi_{xx} + u_\eta \cdot \eta_{xx} +\\ &\quad u_{\xi\xi} \cdot (\eta_x)^2 + u_{\eta\eta} \cdot (-\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta} \cdot \eta_x(-\xi_x) + u_\xi \cdot (-\xi_{xx}) + u_\eta \cdot (-\eta_{xx})\\ &= (u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta})[(\xi_x)^2 + (\eta_x)^2] = 0.\end{aligned}$$

即 v 也满足拉普拉斯方程.

例 6.26　已知方程 $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$，作代换 $u = x + y, v = x - y, w = xy - z$. 将 w 视为 u,v 的函数，w 具有二阶连续偏导数，求代换后的方程(复旦).

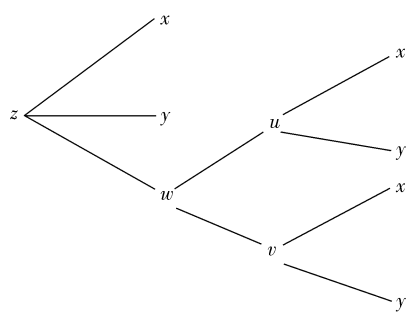


图 6-2　函数的复合层次

解　复合层次如图 6-2 所示.

$$z_x = y - w_u - w_v,$$

$$z_y = x - w_u - w_v \cdot (-1) = x - w_u + w_v,$$

$$z_{xx} = -w_{uu} - w_{uv} - w_{vu} - w_{vv} = -w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv},$$
$$z_{xy} = 1 - w_{uu} - w_{uv} \cdot (-1) - w_{vu} - w_{vv} \cdot (-1) = 1 - w_{uu} + w_{vv},$$
$$z_{yy} = -w_{uu} - w_{uv} \cdot (-1) + w_{vu} + w_{vv} \cdot (-1) = -w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}.$$

于是

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 2 - 4w_{uu} = 0,$$

即

$$w_{uu} = \frac{1}{2}.$$

注 6.3 当自变量和未知函数同时变换时,做这类题目的一般方法是:将原来的未知函数(如 z)写成新未知函数(如 w)的函数. 这样就可把原来的未知函数理解为以新未知函数和新自变量(如 u,v)为中间变量,以原来的自变量(如 x,y)为最终变量的复合函数. 利用复合函数的微分法,求出原导数和新导数(新未知函数对新自变量的导数)之间的关系. 将其代入方程化简、整理即可得到新导数和新自变量所满足的方程.

下面再看一个例子.

例 6.27 设函数 $z = z(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足方程

$$z_{xx} + z_{xy} + z_x = z.$$

现作自变量的代换:$u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$ 及因变量代换 $w = ze^{y}$,将上述方程变为函数 $w = w(u,v)$ 关于 u,v 的偏导数所满足的方程(复旦).

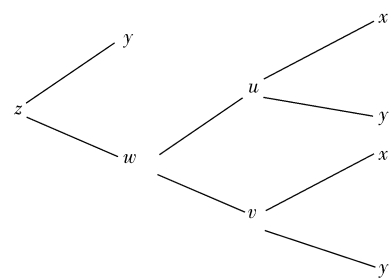


图 6-3 $z=z(x,y)$ 的复合层次

解 复合层次如图 6-3 所示.

由 $z = e^{-y}w$,利用复合函数求偏导:

$$z_x = e^{-y}\left(w_u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w_v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}e^{-y}(w_u + w_v),$$

$$z_{xx} = \frac{1}{2}e^{-y}\left(w_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + w_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + w_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$= \frac{1}{4}e^{-y}(w_{uu} + 2w_{uv} + w_{vv}),$$

$$z_{xy} = -\frac{1}{2}e^{-y}(w_u + w_v) + \frac{1}{2}e^{-y}\left(w_{uu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_{uv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + w_{vu} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w_{vv} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-y}(w_u + w_v) + \frac{1}{4}e^{-y}(w_{uu} - w_{vv}).$$

将 z_{xx}, z_{xy}, z_x 代入原方程整理可得

$$w_{uu} + w_{uv} = 2w.$$

类题　通过代换 $x = t, y = \dfrac{t}{1+tu}, z = \dfrac{t}{1+tv}$，试把方程

$$x^2 z_x + y^2 z_y = z^2$$

变为以 v 为未知函数，t, u 为自变量的形式.

例 6.28　考察变换 $x = a_1 u + b_1 v + c_1 w, y = a_2 u + b_2 v + c_2 w, z = a_3 u + b_3 v + c_3 w$. 问在什么条件下(即 a_i, b_i, c_i 满足什么条件时)，对任何二阶连续可微函数 f，$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2$ 和 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ 在此变换下形式不变.

$$\left(\text{即}\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial w}\right)^2,\right.$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}\right)$$

(复旦).

解　复合层次如图 6-4 所示.

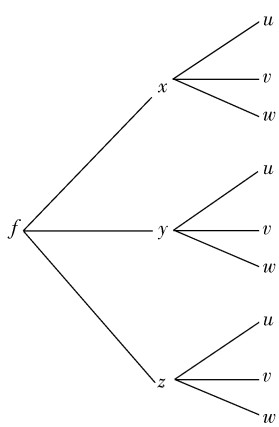


图 6-4　f 的复合层次

利用复合函数求导法可得

$$f_u = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + f_z \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = a_1 f_x + a_2 f_y + a_3 f_z, \tag{1}$$

$$f_v = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + f_z \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = b_1 f_x + b_2 f_y + b_3 f_z, \tag{2}$$

$$f_w = f_x \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + f_y \cdot \frac{\partial y}{\partial w} + f_z \cdot \frac{\partial z}{\partial w} = c_1 f_x + c_2 f_y + c_3 f_z; \tag{3}$$

再求导，有

$$f_{uu} = a_1^2 f_{xx} + a_2^2 f_{yy} + a_3^2 f_{zz} + 2a_1 a_2 f_{xy} + 2a_1 a_3 f_{xz} + 2a_2 a_3 f_{yz}, \tag{4}$$

$$f_{vv} = b_1^2 f_{xx} + b_2^2 f_{yy} + b_3^2 f_{zz} + 2b_1 b_2 f_{xy} + 2b_1 b_3 f_{xz} + 2b_2 b_3 f_{yz}, \tag{5}$$

$$f_{ww} = c_1^2 f_{xx} + c_2^2 f_{yy} + c_3^2 f_{zz} + 2c_1 c_2 f_{xy} + 2c_1 c_3 f_{xz} + 2c_2 c_3 f_{yz}. \tag{6}$$

将式(1)、式(2)、式(3)两边平方并相加,得

$$\begin{aligned} f_u^2 + f_v^2 + f_w^2 = {} & f_x^2(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + f_y^2(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + f_z^2(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) + \\ & 2f_x f_y(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + 2f_y f_z(a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) + \\ & 2f_x f_z(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3). \end{aligned} \tag{7}$$

将式(4)、式(5)、式(6)两边相加,得

$$\begin{aligned} f_{uu} + f_{vv} + f_{ww} = {} & f_{xx}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + f_{yy}(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) + f_{zz}(a_3^2 + b_3^2 + c_3^2) + \\ & 2f_{xy}(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + 2f_{yz}(a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) + \\ & 2f_{xz}(a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3). \end{aligned} \tag{8}$$

由式(7)、式(8)可知,当

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0$$

时,满足题目的要求.

说明:满足上述要求的变换称为正交变换.

例 6.29 设 $f(x,y,z)$ 有连续的偏导数,作自变量变换:$x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{uv}, z = \sqrt{uw}$,它把函数 $f(x,y,z)$ 变成 $F(u,v,w)$. 证明:

$$xf_x + yf_y + zf_z = uF_u + vF_v + wF_w.$$

证法 1 对 $t > 0$,若将 u,v,w 都换为 tu,tv,tw,则相应地 x,y,z 也换成了 tx, ty, tz, 即

$$f(tx,ty,tz) = F(tu,tv,tw).$$

在上式两边关于 t 求导得

$$\begin{aligned} & xf_x(tx,ty,tz) + yf_y(tx,ty,tz) + zf_z(tx,ty,tz) \\ = {} & uF_u(tu,tv,tw) + vF_v(tu,tv,tw) + wF_w(tu,tv,tw). \end{aligned}$$

令 $t = 1$ 可得

$$xf_x + yf_y + zf_z = uF_u + vF_v + wF_w.$$

证法 2 由 $f(x,y,z) = F(u,v,w)$,利用一阶微分形式的不变性可得

$$\mathrm{d}f = f_x \mathrm{d}x + f_y \mathrm{d}y + f_z \mathrm{d}z = F_u \mathrm{d}u + F_v \mathrm{d}v + F_w \mathrm{d}w = \mathrm{d}F.$$

由变换式可知,

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\sqrt{vw}}(w\mathrm{d}v + v\mathrm{d}w), \\ \mathrm{d}y = \dfrac{1}{2\sqrt{uv}}(v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v), \\ \mathrm{d}z = \dfrac{1}{2\sqrt{uw}}(u\mathrm{d}w + w\mathrm{d}u). \end{cases}$$

由此易知,当 $\mathrm{d}u = u, \mathrm{d}v = v, \mathrm{d}w = w$ 时,有

$$\mathrm{d}x = x, \mathrm{d}y = y, \mathrm{d}z = z.$$

反之也如此. 这表明结论成立.

例 6.30　设 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u = 0, \quad \Delta v = 0.$$

令 $F = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$, 证明:当 $p \geqslant 2$ 时,在 $F \neq 0$ 的点处

$$\Delta(F^p) \geqslant 0.$$

证明　记 $G = F^2 = u^2 + v^2, E = F^p = G^{\frac{p}{2}}$,则有

$$E_x = \frac{p}{2}G^{\frac{p}{2}-1}G_x, \qquad E_y = \frac{p}{2}G^{\frac{p}{2}-1}G_y.$$

当 $F \neq 0$ 时,进而有

$$E_{xx} = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)G^{\frac{p}{2}-2}(G_x)^2 + \frac{p}{2}G^{\frac{p}{2}-1}G_{xx},$$

$$E_{yy} = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)G^{\frac{p}{2}-2}(G_y)^2 + \frac{p}{2}G^{\frac{p}{2}-1}G_{yy}.$$

而

$$G_x = 2uu_x + 2vv_x,$$

$$G_{xx} = 2[(u_x)^2 + uu_{xx} + (v_x)^2 + vv_{xx}],$$

$$G_y = 2uu_y + 2vv_y,$$

$$G_{yy} = 2[(u_y)^2 + uu_{yy} + (v_y)^2 + vv_{yy}].$$

于是,由 $\Delta u = 0, \Delta v = 0$. 当 $p \geqslant 2$ 时,有

$$\Delta E = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - 1\right)G^{\frac{p}{2}-2}[(G_x)^2 + (G_y)^2] +$$

$$pG^{\frac{p}{2}-1}[(u_x)^2 + (v_x)^2 + (u_y)^2 + (v_y)^2] \geqslant 0.$$

三、隐函数(组)存在定理及隐函数求偏导

1. 隐函数存在定理:设二元函数 $F(x,y)$ 满足下列条件:

(1)在矩形区域 $D = \{(x,y) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}$ 内有一阶连续的偏导数;

(2) $F(x_0,y_0) = 0$ (初始条件);

(3) $F_y(x_0,y_0) \neq 0$.

则有:

1)在点 (x_0,y_0) 的某邻域内,由方程 $F(x,y) = 0$ 可以确定唯一的函数 $y = f(x)$. 即存在 $\eta > 0$,当 $x \in U(x_0,\eta)$ 时,有

$$F(x,f(x)) \equiv 0,\text{且 } y_0 = f(x_0);$$

2) $f(x)$ 在 $U(x_0,\eta)$ 内连续;

3) $f(x)$ 在 $U(x_0,\eta)$ 内有连续的导数,且

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}.$$

称 $y = f(x)$ 为由方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的隐函数.

注 6.4 (1)隐函数存在定理告诉我们,在什么条件下由方程 $F(x,y) = 0$ 可以确定以 x 为自变量, y 为因变量的函数. 也就是通常说的可以从 $F(x,y) = 0$ 中解出 $y = f(x)$. 这里所说的"解出"并不是指可操作性,而是指存在性. 例如,著名的开普勒(Kepler)方程

$$y - \varepsilon \sin y - x = 0, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

在点(0,0)的邻域内可以确定隐函数 $y = f(x)$,但我们并不能从开普勒方程中写出 y 的显式表达式.

(2)若只要求隐函数连续,则定理的条件(3)可减弱为:" $F(x,y)$ 对每一个 $x \in (x_0 - a, x_0 + a)$ 关于 y 严格单调".

(3)定理的结论是局部的,但在相当强的条件下,有下面整体存在的命题.

命题 6.5 设 $F(x,y)$ 在 $D = \{(x,y) \mid a < x < b, -\infty < y < +\infty\}$ 中连续, F_y 存在且 $F_y \geqslant m > 0$,则 $F(x,y) = 0$ 在 (a,b) 内存在唯一连续解 $y = f(x)$.

(4)关于定理的证明,一般有两种方法:一、几何方法——利用单调性和介值定理,具有很强的直观性;二、逐次逼近法——利用不动点原理,是所谓的"构造性"证明.

2. 隐函数组存在定理:设

(1) $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 在点 $\boldsymbol{P}_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某邻域内有一阶连续偏导数;

(2) $F(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0, G(x_0,y_0,u_0,v_0) = 0$ (初始条件);

(3) $J(\boldsymbol{P}_0) = \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{\boldsymbol{P}_0} \neq 0,$

则存在点 $\boldsymbol{P}_0$ 的一个邻域,在该邻域内由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0, \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

可以确定唯一一对函数

$$u = u(x,y), v = v(x,y),$$

满足 $F(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0, G(x,y,u(x,y),v(x,y)) \equiv 0$ 及 $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$,且 u,v 关于 x,y 的偏导数连续. 进而有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}\Big/J, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}\Big/J,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}\Big/J, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}\Big/J,$$

其中 $J = \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$.

这里需要说明的是:隐函数(组)的求导公式,大家不必去死记硬背. 在实际做题时,直接对方程(组)两边求偏导,然后解出所需要的偏导数即可.

3. 反函数组存在定理:若

$$u = f(x,y), v = g(x,y)$$

在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续可微, $u_0 = f(x_0,y_0), v_0 = g(x_0,y_0)$,且

$$\left.\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0.$$

则在 (u_0,v_0) 的某邻域内存在唯一的反函数组

$$x = x(u,v), y = y(u,v)$$

满足 $x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0)$ 且成立

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1.$$

注 6.5　反函数组存在定理是隐函数组存在定理的特殊情况. 事实上,若令

$$F(x,y,u,v) = u - f(x,y), G(x,y,u,v) = v - g(x,y).$$

对 F,G 利用隐函数组存在定理就可得到反函数组存在定理.

另外,利用隐函数存在定理也可推出反函数存在定理,请同学们自行完成.

例 6.31　证明命题 6.5.

证明　存在性. 即证: $\forall x_0 \in (a,b), \exists y_0 \in (-\infty, +\infty)$,使得 $F(x_0,y_0) = 0$.

事实上, $\forall y_2 > y_1$,考虑

$$F(x_0,y_2) - F(x_0,y_1) = F_y(x_0,\xi)(y_2 - y_1) \geqslant m(y_2 - y_1).$$

固定 y_1, 令 $y_2 \to +\infty$,由 $F(x_0,y_2) \geqslant F(x_0,y_1) + m(y_2 - y_1)$ 知,

$$\lim_{y \to +\infty} F(x_0,y) = +\infty.$$

固定 y_2, 令 $y_1 \to -\infty$,由 $F(x_0,y_1) \leqslant F(x_0,y_2) - m(y_2 - y_1)$ 知,

$$\lim_{y \to -\infty} F(x_0,y) = -\infty.$$

由介值定理, $\exists y_0 \in (-\infty, +\infty)$,使 $F(x_0,y_0) = 0$.

唯一性. 由 $F_y \geqslant m > 0$ 不难看出.

连续性. 对 $x_0 \in (a,b)$, $\forall \varepsilon > 0$,由 $F(x_0,y_0) = 0$ 及 $F_y > 0$ 可知,

$$F(x_0,f(x_0) - \varepsilon) < 0 < F(x_0,f(x_0) + \varepsilon).$$

由 F 关于 x 连续性知, $\exists \delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,有

$$F(x,f(x_0) - \varepsilon) < 0 < F(x,f(x_0) + \varepsilon).$$

由介值定理,有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续. 由 x_0 的任意性, $y=f(x)$ 在 (a,b) 上连续.

顺便指出,从证明的过程看, a,b 分别取 $-\infty$ 和 $+\infty$ 也是可以的.

例 6.32 设 $f(x,y)$ 及其一阶偏导数在(0,1)附近存在、连续,且 $f_y(0,1)\neq 0$, 又 $f(0,1)=0$. 证明:

$$f\left(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x\right)=0$$

在点 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 附近可确定一单值函数 $t=\varphi(x)$,并求 $\varphi'(0)$ (南京大学).

解 令 $F(x,t)=f\left(x,\int_0^t \sin x\mathrm{d}x\right)=f(x,1-\cos t)$.

下面验证 $F(x,t)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 附近满足隐函数存在定理的条件.

由 $F_x(x,y)=f_x(x,1-\cos t)$ 和 $F_t(x,t)=f_y(x,1-\cos t)\sin t$ 及 f 的一阶偏导数在(0,1)附近的连续性可知, $F_x(x,t),F_t(x,t)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 附近连续.

由 $F\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=f(0,1)=0$ 知,初始条件满足.

而 $F_t\left(0,\frac{\pi}{2}\right)=f_y(0,1)\neq 0.$

于是,由隐函数存在定理,在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 附近由方程 $F(x,t)=f(x,1-\cos t)=0$ 可以确定唯一的连续可微函数 $t=\varphi(x)$, 满足

$$F(x,\varphi(x))\equiv 0,$$

且

$$\varphi'(0)=-\frac{f_x(x,1-\cos t)}{f_y(x,1-\cos t)\sin t}\bigg|_{\substack{x=0,\\ t=\frac{\pi}{2}}}=-\frac{f_x(0,1)}{f_y(0,1)}.$$

类题 设 $f'(u)$ 在 $u=1$ 的某邻域内连续且不为零,证明:方程 $2f(xy)=f(x)+f(y)$ 在(1,1)点的邻域内可以唯一确定一个隐函数 $y=y(x)$,并求 $y'(1)$.

提示 令 $F(x,y)=2f(xy)-f(x)-f(y)$,对 $F(x,y)$ 直接验证隐函数存在定理的条件. $y'(1)=-\frac{F_x}{F_y}\big|_{(1,1)}=-1.$

例 6.33 设 $u(x,y)$ 是由方程组 $u=f(x,y,z,t),g(y,z,t)=0,h(z,t)=0$ 确定的函数,其中 f,g,h 均连续可微,且 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$,求 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解法 1 由 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$ 可知,由方程组

$$g(y,z,t)=0,h(z,t)=0 \tag{1}$$

可以确定以 y 为自变量,以 z,t 为因变量的函数,即 $z=z(y),t=t(y)$. 这样复合的层次如图 6-5 所示.

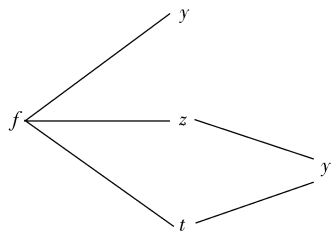


图 6-5　$u(x,y)$的复合层次

于是,由复合函数的微分法,有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\\&=f_2+f_3\cdot z'(y)+f_4\cdot t'(y).\end{aligned}\tag{2}$$

为了求 $z'(y)$ 和 $t'(y)$,在方程组(1)两边关于 y 求导,可得

$$\begin{cases}g_1+g_2z'(y)+g_3t'(y)=0,\\h_1z'(y)+h_2t'(y)=0.\end{cases}$$

由此可得

$$z'(y)=-g_1h_2\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1},\qquad t'(y)=g_1h_1\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.$$

代入式(2)得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2-g_1(f_3h_2-f_4h_1)\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\right)^{-1}.$$

解法 2　直接从下面的方程组出发:

$$\begin{cases}F(x,y,z,t,u)=0,\\g(y,z,t)=0,\\h(z,t)=0,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $F(x,y,z,t,u)=u-f(x,y,z,t)$.

因为 $\dfrac{\partial(F,g,h)}{\partial(u,z,t)}=\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$,所以由方程组(3)可以确定以 x,y 为自变量,以 u,z,t 为因变量的函数. 在方程组(3)两边关于 y 求导,可得

$$\begin{cases}u_y-f_2-f_3z_y-f_4t_y=0,\\g_1+g_2z_y+g_3t_y=0,\\h_1z_y+h_2t_y=0.\end{cases}$$

从这个方程组中解出 u_y 即可.

例 6.34　在直角坐标系 xOy 中引入变换:

$$x=x(u,v),y=y(u,v),$$

并将坐标系中任一点的位置向量记为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)$. 若变换式中函数 x,y 连续可微,Jacobi行列式 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$,且 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial u}$ 与 $\dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial v}$ 垂直,试证:对任何可微函数 $F(u,v)$,其梯度可表示为

$$\mathbf{grad}\ F = \frac{1}{H_u^2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{H_v^2}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v},$$

其中

$$H_u = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\right|, \quad H_v = \left|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right|.$$

(复旦大学).

证明 要证明的结果是一个向量等式. 下面我们通过耐心地计算说明两边相等.

记 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$. 由 $x = x(u,v), y = y(u,v)$ 可得

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 1 = \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}. \end{cases}$$

解之可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v}J^{-1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial y}{\partial u}J^{-1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial x}{\partial v}J^{-1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial u}J^{-1}.$$

故

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}\ F &= \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j} \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)J^{-1}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)J^{-1}\boldsymbol{j}. \end{aligned}$$

由 $\boldsymbol{r} = x(u,v)\boldsymbol{i} + y(u,v)\boldsymbol{j}$ 可得

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}.$$

因为 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}$ 与 $\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ 垂直,所以

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = 0,$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

故

$$\frac{1}{H_u^2}\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} + \frac{1}{H_v^2}\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$$

$$= \frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial u}\boldsymbol{j}\right)\Big/\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial v}\boldsymbol{j}\right)\Big/\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]$$

$$= \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]\right\}J^{-2}\boldsymbol{i}+$$

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2\right]+\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2\right]\right\}J^{-2}\boldsymbol{j}$$

$$= \left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)J^{-1}\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)J^{-1}\boldsymbol{j}$$

$$= \mathbf{grad}\ F.$$

例 6.35　设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内二次连续可微，且 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_{xx}(x_0,y_0)>0$.

(1)试证：存在 y_0 的 δ 邻域 $U(y_0,\delta)$，使对任何 $y\in U(y_0,\delta)$ 能求得 $f(x,y)$ 关于 x 的一个极小值 $g(y)$；

(2)试证：$g'(y_0)=f_y(x_0,y_0)$（复旦）.

证明　(1)对给定的 y，要求 $f(x,y)$ 关于 x 的极小值，按照求极值的步骤，应对 y 找出 x 使得 $f_x(x,y)=0$（即将 y 视为常数，对 $f(x,y)$ 关于 x 求驻点）. 也就是说，找由方程 $f_x(x,y)=0$ 所确定的隐函数 $x=x(y)$，使得 $f_x(x(y),y)=0$.

由已知条件，方程 $f_x(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内满足隐函数存在定理的全部条件，因此在点 (x_0,y_0) 的某个邻域内由方程 $f_x(x,y)=0$ 可确定唯一的连续可微函数 $x=x(y)$ 满足 $x_0=x(y_0)$，$f_x(x(y),y)\equiv 0$. 又由 $f_{xx}(x_0,y_0)>0$ 及其连续性知，存在充分小的 $\delta>0$，使当 $y\in U(y_0,\delta)$ 时，$f_{xx}(x(y),y)>0$. 这表明 $f(x,y)$ 关于 x 在点 $(x(y),y)$ 处取得极小值，记为 $g(y)$，即

$$g(y)=f(x(y),y).$$

(2)由定义及 f 在点 (x_0,y_0) 的可微性，有

$$g'(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{g(y_0+\Delta y)-g(y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\{f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)\},\qquad(1)$$

其中 $\Delta x=x(y_0+\Delta y)-x(y_0)$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$（因为 $x=x(y)$ 在 y_0 的小邻域内连续，所以当 $\Delta y\to 0$ 时，$\Delta x\to 0$，因此 $o(\rho)$ 是有意义的）.

注意到 $f_x(x_0,y_0)=0$ 及

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{x(y_0+\Delta y)-x(y_0)}{\Delta y}=x'_y(y_0)=-\frac{f_{xy}(x_0,y_0)}{f_{xx}(x_0,y_0)}$$

有界，由式(1)可知，

$$g'(y_0)=f_y(x_0,y_0).$$

例 6.36　设 $F(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中有连续的一阶偏导数，并满足

$$y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geqslant\alpha>0\quad(\alpha\text{为常数}).$$

证明:当动点(x,y,z)沿着曲线$\Gamma:x=-\cos t,y=\sin t,z=t(t\geqslant 0)$趋向无穷时,$F(x,y,z)\to+\infty$.

证明 记$f(t)=F(-\cos t,\sin t,t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial x}\sin t+\frac{\partial F}{\partial y}\cos t+\frac{\partial F}{\partial z}.$$

当$(x,y,z)\in\Gamma$时,有$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=y\frac{\partial F}{\partial x}-x\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\geqslant\alpha>0$. 因此,根据微分中值定理,有

$$F(x,y,z)-F(-1,0,0)=f(t)-f(0)=f'(\xi)t\geqslant\alpha t,$$

即

$$F(x,y,z)\geqslant F(-1,0,0)+\alpha t.$$

于是有

$$F(x,y,z)\to+\infty\quad(t\to+\infty).$$

四、偏导数的应用

1. 在几何上的应用

(1)空间曲线的切线与法平面方程

若曲线方程为$x=x(t),y=y(t),z=z(t)(t\in[\alpha,\beta])$,则在曲线对应于$t=t_0$的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的切线方程为:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

法平面方程为:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0,$$

其中$x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$不同时为0. 曲线在点M_0处的切向量$\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$.

若曲线方程为:

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

则在曲线上一点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的切线方程为:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y&F_z\\G_y&G_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z&F_x\\G_z&G_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x&F_y\\G_x&G_y\end{vmatrix}_{M_0}}.$$

法平面方程为:

$$\left|\begin{matrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{matrix}\right|_{M_0}(x-x_0)+\left|\begin{matrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{matrix}\right|_{M_0}(y-y_0)+\left|\begin{matrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{matrix}\right|_{M_0}(z-z_0)=0.$$

(2)曲面的切平面及法线方程

若曲面方程为 $F(x,y,z)=0$,则曲面上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为:

$$F_x(M_0)(x-x_0)+F_y(M_0)(y-y_0)+F_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

法线方程为:

$$\frac{x-x_0}{F_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(M_0)},$$

其中 $F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)$ 不同时为 0. 曲面在 M_0 的法向量为

$$\mathbf{grad}\ F(M_0)=\pm(F_x(M_0),F_y(M_0),F_z(M_0)).$$

若曲面方程为 $z=f(x,y)$,则曲面上的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)(z_0=f(x_0,y_0))$ 处的切平面方程为

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

法线方程为:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

曲面在点 M_0 的法向量为 $\pm(-f_x(x_0,y_0),-f_y(x_0,y_0),1)$.

另外,在许多情况下,要求我们求两条曲线或两张曲面的夹角. 两条曲线之间的夹角是指在交点处两条曲线切向量之间的夹角,而两张曲面在交线上一点处的夹角是指在该点两张曲面的切平面(或法向量)之间的夹角. 明确这些,利用解析几何的知识这类问题就不难解决了!

2. 泰勒公式

泰勒公式　设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的邻域 $U(P_0,r)$ 内具有 $k+1$ 阶连续偏导数,那么对于 $U(P_0,r)$ 内任一点 $(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 都成立

$$\begin{aligned}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)&+\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\\&\frac{1}{2!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots+\\&\frac{1}{k!}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x}+\Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^kf(x_0,y_0)+R_k,\end{aligned}$$

其中 $R_k=\dfrac{1}{(k+1)!}\left(\Delta x\dfrac{\partial}{\partial x}+\Delta y\dfrac{\partial}{\partial y}\right)^{k+1}f(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y),0<\theta<1$,称它为拉格朗日型余项.

在定理的条件下(甚至可减弱为 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续的 k 阶偏导数),也可

取佩亚诺型余项 $R_k = o(\rho^k)(\rho\to 0)$,其中 $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

上述两个公式的证明均可化为一元函数来证明. 带有拉格朗日型余项的,令 $\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)$,利用一元函数的泰勒公式可证;带有佩亚诺型余项的,先把 $f(x,y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 作为 Δx 的一元函数展开成带有佩亚诺型余项的一元泰勒公式,再对各阶偏导数作为 Δy 的一元函数展开,然后整理.

在带有拉格朗日型余项的泰勒公式中,当 $k = 0$ 时,就得到了邻域内的微分中值公式:

$$\begin{aligned} &f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y, \end{aligned}$$

$0 < \theta < 1$. 利用这个结果很容易证明下面的.

命题 6.6 如果 $f(x,y)$ 在开区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上的偏导数恒为零,则它在 D 上必是常值函数.

命题 6.7 (泰勒公式的唯一性)设 $f(x,y)$ 具有 $k+1$ 阶连续偏导数,若用某种方法得到展开式:

$$f(x,y) = \sum_{i+j=0}^{k} A_{ij}\Delta x^i \Delta y^j + o(\rho^k), \rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

则必有

$$A_{ij} = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f(x_0, y_0).$$

3. 极值与最值

(1)无条件极值与最值

无条件极值

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是开区域 $D \subset \mathbf{R}^n$ 上二次可微函数,$\boldsymbol{P}_0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \in D$. 若点 $\boldsymbol{P}_0$ 是 f 的一个极值点,由极值的必要条件有 $\nabla f(P_0) = 0$. 根据泰勒公式有

$$f(\boldsymbol{P}_0 + \Delta x) = f(\boldsymbol{P}_0) + \frac{1}{2!}\Delta x \boldsymbol{H} \Delta x^{\mathrm{T}} + o(\rho^2),$$

其中 $\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{P}_0)\right)_{n\times n}$ 称为海赛(Hesse)阵. 由此可得到取得极值的充分条件:

1)若 $\boldsymbol{H}$ 正定,则 $f(\boldsymbol{P}_0)$ 是极小值;

2)若 $\boldsymbol{H}$ 负定,则 $f(\boldsymbol{P}_0)$ 是极大值;

3)若 $\boldsymbol{H}$ 不定(即既有正特征根,也有负特征根),则点 $\boldsymbol{P}_0$ 不是极值点;

4)若 $\boldsymbol{H}$ 半定(即所有特征根同号,但有零特征根),则需要作进一步判断. 特别地,对二元函数 $f(x,y)$,如果 $f(x,y)$ 在驻点 (x_0, y_0) 的某个邻域内有二阶连续偏导数,并记 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0), \Delta = AC - B^2$,则

1)若 $\Delta > 0, A > 0$(或 $C > 0$),则 $f(x_0, y_0)$ 是极小值;

2)若 $\Delta > 0, A < 0$(或 $C < 0$),则 $f(x_0, y_0)$ 是极大值;

3)若 $\Delta < 0$,则 (x_0, y_0) 不是极值点;

4)若 $\Delta = 0$,则需要作进一步判断.

注 6.6　上面给出的极值充分条件只局限于**特殊驻点** $\boldsymbol{P}_0$(即 f 在驻点 $\boldsymbol{P}_0$ 的某邻域内有二阶连续偏导数). 而对其他点(偏导数不存在的点、二阶偏导数不存在的驻点、二阶偏导数不连续的驻点)必须用别的方法来判断.

无条件最值

求多元函数的最值一般有以下四种方法(以二元函数为例).

1) $f(x, y)$ 定义在有界闭区域 D 上. 先求出 D 内的全部驻点和不可偏导点及相应的函数值,然后求 f 在 ∂D 上的最值(可将边界曲线代入 $f(x, y)$ 化为求一元函数的最值),最后比较这些函数值的大小. 最大者为最大值,最小者为最小值;

2) $f(x, y)$ 定义在无界区域上. 去掉明显不取最值的无界子区域,化成在剩余部分(即有界区域)上的最值问题;

3) $f(x, y)$ 定义在有界开区域上. 先将 $f(x, y)$ 连续延拓到 $\overline{D}$ 上,然后在有界闭区域上求最值,最后求出所要的结果;

4)利用

$$\max f = \max_x \max_y f \quad 或 \quad \max_y \max_x f,$$

对 x, y 累次求最大值.

注 6.7　对多元函数而言,唯一的极值点并不一定是最值点. 例如,函数 $f(x, y) = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 在 $\mathbf{R}^2$ 有唯一的极大值点 $(0, 0)$,但 $f(0, 0) = 0$ 并不是 $f(x, y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值. 事实上,由

$$f(x, y) = x^3 - 3x^2 - (y - x)^2.$$

可见, $f(x, y)$ 的最大值只能在直线 $y = x$ 上取到,此时, $f(x, x) = x^3 - 3x^2$. 显然 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x, x) = +\infty$,即 $f(x, x)$ 无最大值.

但在实际问题中,如果所考虑的问题确有最值,而边界值明显不是最值,在区域内部驻点又唯一,则该驻点必是最值点.

(2)条件极值与最值

条件极值

目标函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在约束条件 $\varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 (i = 1, 2, \cdots, m, m < n)$ 之下的极值问题,可归结为求拉格朗日函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

的无条件极值,其中 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 为常数因子,这种方法称为拉格朗日乘子

法.

拉格朗日乘子法的具体步骤如下:

第一步:令 $L_{x_i}=0(i=1,2,\cdots,n)$ 与 $\varphi_i=0(i=1,2,\cdots,m)$ 联立解出 L 的全部驻点和 λ_i 的具体值(在许多情况下,可不解出 λ_i 的具体值),并要求在驻点处矩阵

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

的秩为 m(即要求 m 个约束条件是独立的);

第二步:对每一个驻点 $\boldsymbol{P}_0$,算出海色阵 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)=\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}(\boldsymbol{P}_0)$.

1)若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)$ 正定,则 $\boldsymbol{P}_0$ 点为(条件)极小值点;

2)若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)$ 负定,则 $\boldsymbol{P}_0$ 为(条件)极大值点;

3)若 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)$ 既不正定,也不负定,则由

$$\mathrm{d}\varphi_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j=0,i=1,2,\cdots,m$$

可解出 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_n$ 中的 m 个$\left(\text{因为矩阵}\left(\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right)_{m\times n}\text{的秩为}m\right)$. 不妨设解出的是 $\mathrm{d}x_1,\mathrm{d}x_2,\cdots,\mathrm{d}x_m$,将它们代入 n 元二次型 $\mathrm{d}^2L(\boldsymbol{P}_0)=\left(\mathrm{d}x_1\dfrac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+\mathrm{d}x_n\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^2L(\boldsymbol{P}_0)$ 中,化为 $(n-m)$ 元二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n-m}a_{ij}\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j$. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{(n-m)\times(n-m)}$.

(3-1)若 $\boldsymbol{A}$ 正定,则 $\boldsymbol{P}_0$ 点为(条件)极小值点;

(3-2)若 $\boldsymbol{A}$ 负定,则 $\boldsymbol{P}_0$ 点为(条件)极大值点;

(3-3)若 $\boldsymbol{A}$ 不定,则 $\boldsymbol{P}_0$ 点不是(条件)极值点;

(3-4)若 $\boldsymbol{A}$ 半定,则需要作进一步判断.

条件最值

条件最值可通过比较条件极值、边界最值、不可偏导点的值以及二阶偏导数不存在点的值来得到. 但由于确定条件极值比较麻烦,所以条件最值的求法也是很烦琐的!

(3)隐函数的极值

求隐函数的极值有两种方法:(1)直接从方程出发,求出驻点,并利用求无条件极值的方法判断驻点是否为极值点,从而求出极值. 这种方法叫直接法;(2)化为条件极值,并利用求条件极值的方法求出极值. 这种方法叫间接法.

例 6.37　在什么条件下,方程组

$$x = f(u,v), y = g(u,v), z = h(u,v), F(u,v) = 0 \tag{1}$$

能在 $O - xyz$ 空间代表一空间曲线?在怎样的点

$$(x_0,y_0,z_0) = (f(u_0,v_0),g(u_0,v_0),h(u_0,v_0))$$

处可求切线?写出切线方程和法平面方程.

解　在所给的方程组中,若能由 $F(u,v) = 0$ 确定一个隐函数,例如 $v = v(u)$,则 $x = x(u) = f(u,v(u)), y = y(u) = g(u,v(u)), z = z(u) = h(u,v(u))$ 表示一空间曲线(实际上是空间曲线的一部分). 为此,假设 F_u, F_v 在点 (u_0,v_0) 的某邻域内连续,且 $F(u_0,v_0) = 0, F_v(u_0,v_0) \neq 0$. 此时有 $v' = -\dfrac{F_u}{F_v}$,故当

$$\begin{aligned}(x'(u_0),y'(u_0),z'(u_0)) &= (f_1 + f_2v', g_1 + g_2v', h_1 + h_2v')\big|_{(u_0,v_0)} \\ &= \frac{1}{F_v}(f_1F_v - f_2F_u, g_1F_v - g_2F_u, h_1F_v - h_2F_u)\big|_{(u_0,v_0)} \\ &\neq (0,0,0)\end{aligned}$$

时,在点 $(x_0,y_0,z_0) = (f(u_0,v_0),g(u_0,v_0),h(u_0,v_0))$ 的某邻域内,方程组(1)能代表唯一的一条通过点 (x_0,y_0,z_0) 的曲线,且在该点可求切线.

切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x - x_0}{x'(u_0)} = \frac{y - y_0}{y'(u_0)} = \frac{z - z_0}{z'(u_0)}$$

和

$$x'(u_0)(x - x_0) + y'(u_0)(y - y_0) + z'(u_0)(z - z_0) = 0.$$

例 6.38　求空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{9}{4}, \\ 3x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \dfrac{17}{4} \end{cases}$$

上对应于点 $x = 1$ 的处的切线方程与法平面方程.

解　当 $x = 1$ 时,有

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = \dfrac{5}{4}, \\ (y - 1)^2 + z^2 = \dfrac{5}{4}, \end{cases}$$

解之得 $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ 与 $\left(\dfrac{1}{2},-1\right)$. 于是对应于 $x = 1$ 的点是 $P\left(1,\dfrac{1}{2},1\right), Q\left(1,\dfrac{1}{2},-1\right)$.

设

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{9}{4}, \\ F_2(x,y,z) = 3x^2 + (y-1)^2 + z^2 - \dfrac{17}{4}. \end{cases}$$

通过计算易知,

$$\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)} = 4z, \quad \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)} = 8xz, \quad \frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)} = -4x - 8xy.$$

在点 $P\left(1,\frac{1}{2},1\right)$,有

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_P = 4, \quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_P = 8, \quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P = -8.$$

于是,切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{-2},$$

和

$$x + 2y - 2z = 0;$$

在点 $Q\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$,有

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,z)}\right|_Q = -4, \quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,x)}\right|_Q = -8, \quad \left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_Q = -8.$$

于是,切线方程和法平面方程分别为:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-2} = \frac{z+1}{-2},$$

和

$$x + 2y + 2z = 0.$$

例 6.39 选择题:设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义,且 $f_x(0,0) = 3$, $f_y(0,0) = 1$,则(　　)(数学Ⅰ).

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$;

(B)曲面 $z = f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$;

(C)曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$;

(D)曲线 $\begin{cases} z = f(x,y) \\ y = 0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

解 题目中只假设 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 有两个偏导数存在,而偏导数存在不能保证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微,所以(A)不能选.

令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，易知，曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\pm(3,1,-1)$. 因此(B)不能选.

曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 的参数方程为：

$$x=x,y=0,z=f(x,0).$$

因此曲线在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$，故选(C).

例 6.40　给定曲面 $F\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$（$a,b,c$ 为常数），或由它确定的曲面 $z=z(x,y)$. 证明：

(1)曲面的切平面通过一定点；

(2)函数 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$.

证明　(1)由

$$F_1\cdot\left[\frac{1}{z-c}-\frac{x-a}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]+F_2\cdot\left[-\frac{y-b}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]=0,$$

$$F_1\cdot\left[-\frac{x-a}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right]+F_2\cdot\left[\frac{1}{z-c}-\frac{y-b}{(z-c)^2}\frac{\partial z}{\partial y}\right]=0$$

及 F_1,F_2 不能同时为零，可得

$$\begin{vmatrix} (z-c)-(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial x} & -(y-b)\dfrac{\partial z}{\partial x} \\ -(x-a)\dfrac{\partial z}{\partial y} & (z-c)-(y-b)\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=0,$$

化简得

$$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial z}{\partial y}=z-c.$$

由此可以看出，曲面 $z=z(x,y)$ 的切平面过定点 (a,b,c).

(2)对上式两边再分别关于 x,y 求偏导，得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}+(x-a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(y-b)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ (x-a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial y}+(y-b)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial z}{\partial y}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (x-a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(y-b)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \\ (y-b)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-(x-a)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}. \end{cases}$$

由此可见，当 $(x-a)(y-b)\neq 0$ 时，等式成立. 由函数连续可微知，对 $x=a$ 或 $y=$

b 时等式仍成立.

类题 证明:可微曲面 $F\left(\frac{z}{y},\frac{x}{z},\frac{y}{x}\right)=0$ 的切平面过一定点.

例 6.41 设

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^{-1}(1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}), & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

求 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的四阶泰勒多项式,并求出

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0),\qquad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0).$$

(北师大).

解 由于

$$\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}=1+x(x^2+y^2)+\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)^2+o([x(x^2+y^2)]^2),$$

所以

$$(x^2+y^2)^{-1}[1-\mathrm{e}^{x(x^2+y^2)}]=-x-\frac{1}{2}x^2(x^2+y^2)+o(x^2(x^2+y^2)).$$

由泰勒展开式的唯一性知,$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的四阶泰勒展开式为:

$$-x-\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2y^2.$$

由此可得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=0,\quad \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}(0,0)=4!\left(-\frac{1}{2}\right)=-12.$$

例 6.42 设 $f(x,y)$ 在单位圆域 $D:x^2+y^2\leqslant 1$ 上具有一阶连续的偏导数,且满足 $|f(x,y)|\leqslant 1$. 证明:在单位圆内有一点 (x_0,y_0),使得

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2\leqslant 16.$$

证明 设 $g(x,y)=f(x,y)+2(x^2+y^2)$,则在单位圆周 $x^2+y^2=1$ 上显然有 $g(x,y)\geqslant 1$. 而 $g(0,0)\leqslant 1$,所以或者 g 在 D 上恒等于 1,或者在单位圆内存在一点 (x_0,y_0),使 g 在该点取到极小值. 总之,必在单位圆内存在一点 (x_0,y_0),使得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0.$$

由此可得

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=-4x_0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=-4y_0.$$

故

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^2=16(x_0^2+y_0^2)\leqslant 16.$$

例 6.43　证明:函数

$$f(x,y) = (1+\mathrm{e}^{y})\cos x - y\mathrm{e}^{y}$$

有无穷多个极大值,但无极小值(大连海运学院).

证明　$f_x = -(1+\mathrm{e}^{y})\sin x$,　　$f_y = (\cos x - 1 - y)\mathrm{e}^{y}$,

$f_{xx} = -(1+\mathrm{e}^{y})\cos x$,　　$f_{xy} = -\mathrm{e}^{y}\sin x$,

$f_{yy} = (\cos x - 2 - y)\mathrm{e}^{y}$.

令 $f_x = 0$, $f_y = 0$,解方程组可得无穷多个驻点 $(n\pi, \cos n\pi - 1)(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.

当 n 为偶数时,驻点为 $(2k\pi, 0)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$,此时

$$\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^{2} = 2 > 0, f_{xx} = -2 < 0,$$

故 $f(x,y)$ 在驻点 $(2k\pi, 0)$ 处取得极大值,极大值为 $f(2k\pi, 0) = 2$.

当 n 为奇数时,驻点为 $((2k+1)\pi, -2)$,此时

$$\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy} - f_{xy}^{2} = -(1+\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{-2} < 0,$$

$f(x,y)$ 在 $((2k+1)\pi, -2)$ 处无极值. 综上知,$f(x,y)$ 有无穷多个极大值,但无极小值.

注 6.8　在一元函数中,极大值与极小值总是交替出现,但在多元函数中这种情况却不一定发生. 例 6.43 正说明了这一点.

例 6.44　设 D 是由光滑封闭曲线 L 所围成的区域,$f(x,y)$ 在 $\overline{D}$ 有二阶连续偏导数,且 $a\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, a, b > 0$. 如果 f 在 L 上等于常数 C,证明:f 在 D 上恒等于常数 C.

证明　只需证明:f 的最值不可能在 D 内取到即可. 若 $\exists (x_0, y_0) \in D$,使得 f 在 (x_0, y_0) 点达到它在 $\overline{D}$ 上的最大值或最小值. 由 f 的连续性可知,(x_0, y_0) 必是 f 的极大值点或极小值点,因而应有 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$. 由已知条件,易知判别式

$$\begin{aligned}\Delta &= f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 \\ &= -\frac{b}{a}(f_{yy}(x_0, y_0))^2 - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0.\end{aligned}$$

由此可知,(x_0, y_0) 不是 f 的极值点. 这与上面的假设矛盾,因而 f 在 $\overline{D}$ 上的最值只能在边界 L 上取到,所以 f 在 D 上恒等于常数 C.

例 6.45　求 $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ 在全平面上的最大最小值.

解法 1　令 $f_x = 2x - y - 2 = 0, f_y = -x + 2y + 1 = 0$ 可得驻点 $(1,0)$. 通过计算易知,$\Delta = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = 3 > 0, f_{xx} = 2 > 0$,所以 $(1,0)$ 为极小点,极小值为 $f(1,0) = -1$. 注意到

$$f(x,y) \geqslant \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - 2x + y,$$

于是有

$$\lim_{|x|\to+\infty} f(x,y) = +\infty \text{ 或 } \lim_{|y|\to+\infty} f(x,y) = +\infty.$$

由此可见,$f(x,y)$ 在全平面上无最大值. 而另一方面,$\exists M > 0$,当 $|x| \geqslant M$ 或 $|y| \geqslant M$ 时

$$f(x,y) > f(1,0) = -1.$$

即 $f(x,y)$ 在有界闭域:$|x| \leqslant M, |y| \leqslant M$ 上的最小值 -1,必是 $f(x,y)$ 在全平面上的最小值.

解法 2 先固定 x,求 $\min\limits_{y\in\mathbf{R}} f(x,y)$. 将 $f(x,y)$ 改写为:

$$f(x,y) = \left(y + \frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}\right).$$

显然,

$$\min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}.$$

于是

$$\min_{x\in\mathbf{R}} \min_{y\in\mathbf{R}} f(x,y) = \min_{x\in\mathbf{R}} \left[\frac{3}{4}(x-1)^2 - 1\right] = -1,$$

故

$$\min_{(x,y)\in\mathbf{R}^2} f(x,y) = -1.$$

又由 $f(0,y) = y^2 + y$ 可知,$f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上无最大值.

解法 3 用配方法.

$$f(x,y) = \left(x - 1 - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 - 1 \geqslant -1,$$

且 $f(1,0) = -1$ 即最小值为 -1,但无最大值.

例 6.46 对三角形 ABC,求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 的最大值.

解 这个题目有一定难度,在此我们将采用累次求最值的方法求其最大值.

三角形三个角 A,B,C 的取值范围为

$$(A,B,C) \in D \triangleq \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha+\beta+\gamma = \pi, \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0\}.$$

首先,求 $3\sin A + 4\sin B + 18\sin C$ 在 D 的闭包

$$E = \{(\alpha,\beta,\gamma) \mid \alpha+\beta+\gamma = \pi, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \gamma \geqslant 0\}$$

上的最大值,此时有

$$\begin{aligned}
&\max_{(A,B,C)\in E} (3\sin A + 4\sin B + 18\sin C)\\
&= \max_{\substack{A+C\leqslant\pi\\ A,C\geqslant 0}} (3\sin A + 4\sin(A+C) + 18\sin C)\\
&= \max_{0\leqslant C\leqslant\pi} \max_{0\leqslant A\leqslant\pi-C} ((3+4\cos C)\sin A + 4\sin C\cos A + 18\sin C)
\end{aligned}$$

$$= \max_{0\leqslant C\leqslant \pi}\ \max_{0\leqslant A\leqslant \pi - C}\left(\sqrt{(3+4\cos C)^2+16\sin^2 C}\cdot\sqrt{\sin^2 A+\cos^2 A}+18\sin C\right)$$

$$= \max_{0\leqslant C\leqslant \pi}\left(\sqrt{25+24\cos C}+18\sin C\right).$$

记

$$f(C) = \sqrt{25+24\cos C}+18\sin C, C\in[0,\pi].$$

由于

$$\max_{C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\sin C = \max_{C\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}\sin C,\ \max_{C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}\cos C > \max_{C\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}\cos C,$$

所以　$f(C)$ 在$[0,\pi]$上的最大值实际上在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上取到. 因此,只须考虑$f(C)$ 在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最大值即可.

令

$$f'(C) = 18\cos C - \frac{12\sin C}{\sqrt{25+24\cos C}} = 0$$

可得

$$(8\cos C-1)(27\cos^2 C+32\cos C+4) = 0.$$

解之可得　$C=\arccos\dfrac{1}{8}$. 于是

$$\max_{C\in[0,\pi]} f(C) = \max_{C\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f(C) = \max\left\{f\left(\arccos\frac{1}{8}\right), f(0), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$= \max\left\{\frac{35\sqrt{7}}{4}, 7, 23\right\} = \frac{35\sqrt{7}}{4}.$$

下面求 $3\sin A+4\sin B+18\sin C$ 在 E 的边界上(A,B,C 之一为零)的最大值.

若 $A=0$,则 $B+C=\pi$,此时目标函数变成 $4\sin B+18\sin C=22\sin B$,易见最大值为 22;

若 $B=0$,则 $A+C=\pi$,此时目标函数变成 $3\sin A+18\sin C=21\sin A$,易见最大值为 21;

若 $C=0$,则 $A+B=\pi$,此时目标函数变成 $3\sin A+4\sin B=7\sin A$,易见最大值为 7.

综上可知,所求的最大值为 $\max\left\{\dfrac{35\sqrt{7}}{4},22\right\}=\dfrac{35\sqrt{7}}{4}$.

类题　已知 x,y,z 为实数,且 $e^x+y^2+|z|=3$,证明:

$$e^x y^2|z|\leqslant 1.$$

提示　记 $a=e^x, b=y^2, c=|z|$,则 a,b,c 是三个非负实数,所求问题转化为计算二元函数 $u(a,b)=ab(3-a-b)$ 在有界闭区域 $D=\{(a,b)\mid a+b\leqslant 3, a\geqslant 0, b\geqslant 0\}$ 上

的最大值.

例 6.47 证明：

$$f(x,y) = yx^y(1-x) < e^{-1}, 0 < x < 1, 0 < y < +\infty.$$

(吉林大学).

证明 只要证明 $f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 上的最大值小于 e^{-1} 即可.

显然，$f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1, 0 < y < +\infty$ 的边界上恒为 0，而在区域内部 $f(x,y) > 0$. 由于 $\lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = 0$，因此，它的最大值只能在区域内部达到.

令

$$\begin{cases} f_x = yx^{y-1}(y - xy - x) = 0, \\ f_y = x^y(1-x)(1 + y\ln x) = 0. \end{cases}$$

注意到 $0 < x < 1, y > 0$，上述方程组可化为：

$$\begin{cases} y - xy - x = 0, \\ 1 + y\ln x = 0, \end{cases}$$

即

$$y(1-x) = x, x^y = e^{-1}.$$

在这样的点上，$f(x,y) = yx^y(1-x) = xe^{-1} < e^{-1}$，即 $f(x,y)$ 在区域 $0 < x < 1$，$0 < y < +\infty$ 上的最大值小于 e^{-1}.

类题 证明 $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) \leqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$ $(0 < x, y < \pi)$ (中科院).

例 6.48 证明：$\dfrac{x^2+y^2}{4} \leqslant e^{x+y-2}$ 对 $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ 成立.

证明 将原不等式变形为

$$(x^2+y^2)e^{-x-y} \leqslant 4e^{-2}, \forall x \geqslant 0, y \geqslant 0.$$

这样就将问题转化为求 $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{-x-y}$ 在区域 $D = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 上的最大值.

令

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-x-y}(2x - x^2 - y^2) = 0, \\ f_y(x,y) = e^{-x-y}(2y - x^2 - y^2) = 0. \end{cases}$$

解之可得，在 D 的内部有唯一驻点 $(1,1)$，且 $f(1,1) = 2e^{-2}$.

注意到，$\forall x > 0, \lim\limits_{y\to+\infty} f(x,y) = 0$ 和 $\forall y > 0, \lim\limits_{x\to+\infty} f(x,y) = 0$，所以 $f(x,y)$ 在 D 的内部最大值为 $f(1,1) = 2e^{-2}$.

下面求 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大值.

在 $y = 0$ 上，$f(x,0) = x^2e^{-x}, x \geqslant 0$.

令$f_x(x,0)=0$,可得驻点$x=0,2$. 此时$f(0,0)=0,f(2,0)=4e^{-2}$. 因此,$f(x,y)$在$y=0$上的最大值为$4e^{-2}$.

同理,$f(x,y)$在$x=0$上的最大值为$4e^{-2}$. 综上,$f(x,y)$在D上的最大值为$4e^{-2}$,即$(x^2+y^2)e^{-x-y}\leqslant 4e^{-2}$,$\forall x\geqslant 0,y\geqslant 0$.

例 6.49　试求函数$f(x,y,z)=(ax+by+cz)e^{-(x^2+y^2+z^2)}$的最大最小值,其中$a^2+b^2+c^2>0$.

解　令$f_x=0,f_y=0,f_z=0$可得

$$\begin{cases}2x(ax+by+cz)=a, & (1)\\ 2y(ax+by+cz)=b, & (2)\\ 2z(ax+by+cz)=c. & (3)\end{cases}$$

$(1)\times a+(2)\times b+(3)\times c$可得

$$2(ax+by+cz)^2=a^2+b^2+c^2,$$

即

$$ax+by+cz=\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}.$$

记$r=\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)}$,由式(1)、式(2)、式(3)可得两个驻点:

$$\left(\frac{a}{r},\frac{b}{r},\frac{c}{r}\right)\text{和}\left(-\frac{a}{r},-\frac{b}{r},-\frac{c}{r}\right),$$

函数$f(x,y,z)$在这两个驻点处的值分别为$\frac{r}{2\sqrt{e}}$和$-\frac{r}{2\sqrt{e}}$.

下面我们将说明这两个值就是f在$\mathbf{R}^3$上的最大值和最小值.

考虑以原点为中心,ρ为半径的球面S_ρ:$x=\rho\cos\alpha,y=\rho\cos\beta,z=\rho\cos\gamma$. 在$S_\rho$上,$f(x,y,z)=\rho e^{-\rho^2}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma)$. 所以

$$|f(x,y,z)|\leqslant(|a|+|b|+|c|)\rho e^{-\rho^2}\to 0(\rho\to+\infty).$$

从而存在$\rho_0>0$,使当$\rho=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\geqslant\rho_0$时,有

$$|f(x,y,z)|<\frac{r}{2\sqrt{e}}.$$

由此可见,f在整个$\mathbf{R}^3$上的最值与它在有界闭域$D=\{(x,y,z)\,|\,\rho\leqslant\rho_0\}$上的最值相同. 由上式知,$f$在$D$上的最值一定在$D$的内部达到,因而必在驻点处达到,故$f$在整个$\mathbf{R}^3$上的最大、最小值分别为$\frac{r}{2\sqrt{e}}$和$-\frac{r}{2\sqrt{e}}$.

例 6.50　求$f(x,y,z)=xyz$在条件$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r}(x>0,y>0,z>0,r>0)$下的极小值;并证明不等式

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1} \leqslant \sqrt[3]{abc},$$

其中 a,b,c 为任意正实数.

解 构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{r}\right).$$

令

$$\begin{cases} L_x = yz - \dfrac{\lambda}{x^2} = 0, & (1)\\ L_y = zx - \dfrac{\lambda}{y^2} = 0, & (2)\\ L_z = xy - \dfrac{\lambda}{z^2} = 0, & (3)\\ L_\lambda = \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{r} = 0. & (4) \end{cases}$$

由式(1)、式(2)、式(3)易得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{3xyz}{\lambda} \triangleq 3\mu.$$

将它们代入式(4)求出 $\mu = \dfrac{1}{3r}$,从而解出驻点为 $x = y = z = 3r, \lambda = (3r)^4$.

下面来判断这个驻点是极小值点.

由 $L_{xx} = \dfrac{2\lambda}{x^3}, L_{yy} = \dfrac{2\lambda}{y^3}, L_{zz} = \dfrac{2\lambda}{z^3}, L_{xy} = L_{yx} = z,$

$L_{xz} = L_{zx} = y, L_{yz} = L_{zy} = x,$

可得 L 在驻点 P_0 处的海色阵

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0) = \begin{pmatrix} 6r & 3r & 3r \\ 3r & 6r & 3r \\ 3r & 3r & 6r \end{pmatrix}.$$

因为

$$|6r| = 6r > 0, \begin{vmatrix} 6r & 3r \\ 3r & 6r \end{vmatrix} = 27r^2 > 0, \begin{vmatrix} 6r & 3r & 3r \\ 3r & 6r & 3r \\ 3r & 3r & 6r \end{vmatrix} = 108r^3 > 0,$$

所以 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)$ 正定,故驻点为极小值点,而且极小值为 $f(3r,3r,3r) = (3r)^3$.

注意到在 $x>0, y>0, z>0$ 上,变量 x,y,z 中任何一个趋向于 $+\infty$,都将有 $f \to +\infty$,所以 f 在第一卦限的最小值必在有界区域 $D = \{(x,y,z) \mid \rho \leqslant \rho_0, x,y,z>0\}$(其中 $\rho_0 > 0$ 是一个适当的正常数,$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$)上取到. 而由约束条件知, x,y,z

中均不可能趋向于0,因此f在第一卦限的最小值必在D的内部取到. 由于f在D的内部有唯一的极小值点,所以这个极小值点也是最小值点,且最小值为$(3r)^3$. 这样,

$$\text{当 } x>0,y>0,z>0 \text{ 且} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r} \text{ 时,有 } xyz \geqslant (3r)^3. \tag{5}$$

令$x=a,y=b,z=c$,则$r=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}$,代入不等式(5),有

$$abc \geqslant \left[3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1}\right]^3$$

或

$$3\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{-1} \leqslant \sqrt[3]{abc} \quad (a>0,b>0,c>0).$$

例 6.51　求$x>0,y>0,z>0$时,函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的极大值;并证明当a,b,c为正实数时,有

$$ab^2c^3<108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

(清华大学).

解　构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,r)=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2).$$

令　$L_x=\frac{1}{x}+2\lambda x=0, L_y=\frac{2}{y}+2\lambda y=0, L_z=\frac{3}{z}+2\lambda z=0,$

$L_\lambda=x^2+y^2+z^2-6r^2=0.$

解出驻点为$x=r,y=\sqrt{2}r,z=\sqrt{3}r,\lambda=-\frac{1}{2r^2}$.

下面来判断这个驻点为极大值点.

由　$L_{xx}=-\frac{1}{x^2}+2\lambda, L_{yy}=-\frac{2}{y^2}+2\lambda, L_{zz}=-\frac{3}{z^2}+2\lambda,$

$L_{xy}=L_{yx}=L_{xz}=L_{zx}=L_{yz}=L_{zy}=0,$

可得L在驻点P_0处的海色阵

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{r^2} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{2}{r^2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{2}{r^2}\end{pmatrix}.$$

显然$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{P}_0)$负定,故驻点为极大值点,而且极大值为$f(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$.

因为f在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$位于第一卦限的部分上连续,所以f必在其上

取到最大值. 注意到当动点趋向于边界线(其上 x,y,z 之一为 0)时, $f\to -\infty$,故 f 的最大值只能在内部取到,而内部有唯一的极大值点,因此这个极大值点也必是最大值点,且最大值为 $f(r,\sqrt{2}r,\sqrt{3}r)=\ln(6\sqrt{3}r^6)$,即

当 $x>0,y>0,z>0$ 且满足 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 时,有

$$xy^2z^3\leqslant 6\sqrt{3}r^6=6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3.$$

取 $x^2=a,y^2=b,z^2=c$, 上式变为:

$$a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{3}{2}}\leqslant 6\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3.$$

两边平方,即得

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

例 6.52 设有一座小山,取它的底面所在的平面为 xOy 坐标平面,其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$. 小山的高度函数为

$$h(x,y)=75-x^2-y^2+xy.$$

(1)设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此方向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$,试写出 $g(x_0,y_0)$ 的表达式;

(2)现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说,要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使(1)中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置(数学Ⅰ).

解 (1)高度函数 $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的梯度是

$$\mathbf{grad}\ h\big|_{M(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0,x_0-2y_0).$$

由梯度的几何意义知,沿此梯度方向,高度函数 $h(x,y)$ 的方向导数取最大值,并且这个最大值就是此梯度的模. 于是

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}\ .$$

(2)令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$. 依题意,只需求函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $x^2+y^2-xy=75$ 下的最大值点即可.

令 $L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(x^2+y^2-xy-75)$, 则由

$$\begin{cases} L_x=10x-8y+\lambda(2x-y)=0, & (1)\\ L_y=10y-8x+\lambda(2y-x)=0, & (2)\\ L_\lambda=x^2+y^2-xy=75, & (3)\end{cases}$$

可得

$$(x+y)(\lambda+2)=0,\text{ 即 }x+y=0\text{ 或 }\lambda=-2.$$

当 $x+y=0$ 时,由式(3)可得: $x=\pm 5,y=\mp 5$;

当 $\lambda = -2$ 时,由式(1)得:$y = x$. 再由式(3)可得:$x = y = \pm 5\sqrt{3}$. 这样就得到了四个驻点:

$$M_1(5,-5), M_2(-5,5), M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}), M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

计算可知,

$$f(M_1) = f(M_2) = 450, f(M_3) = f(M_4) = 150,$$

故 M_1, M_2 点都可作为攀登的起点.

例 6.53　求函数 $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ 上的最大值与最小值. 这里 $b^2 - ac < 0, a, b, c > 0$.

解　先考虑 D 的内部 $\operatorname{int} D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$,这是无条件极值问题.

令

$$\begin{cases} f_x = 2ax + 2by = 0, \\ f_y = 2bx + 2cy = 0. \end{cases}$$

由 $b^2 - ac < 0$ 知,方程组的系数行列式不等于零,因此方程组只有零解 $x = 0, y = 0$,即(0,0)点是驻点. 通过计算易知,在(0,0)点

$$A = f_{xx} = 2a, B = f_{xy} = 2b, C = f_{yy} = 2c$$

$$\Delta = AC - B^2 = 4(ac - b^2) > 0, A > 0.$$

所以(0,0)点是 f 的极小值点,极小值为 $f(0,0) = 0$.

再考虑 D 的边界 $\partial D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$,这是条件极值问题.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda) = ax^2 + 2bxy + cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2ax + 2by - 2\lambda x = 0, & (1) \\ L_y = 2bx + 2cy - 2\lambda y = 0, & (2) \\ L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. & (3) \end{cases}$$

(1) $\times \frac{x}{2}$ + (2) $\times \frac{y}{2}$,并注意到式(3),可得

$$f(x,y) = \lambda(x^2 + y^2) = \lambda.$$

下面来求 λ 的值.

由(3)知,由方程(1)、(2)所构成的方程组有非零解,因此其系数行列式等于零,即

$$\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0.$$

因为 $\Delta = (a + c)^2 - 4(ac - b^2) = (a - c)^2 + 4b^2 > 0$,所以,关于 λ 的方程有两个相异实根,即

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 - 4(ac-b^2)}].$$

由于连续函数 f 在有界闭集 $\partial D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 上必存在最大值和最小值,因此 f 在 ∂D 上的最大值为 λ_1,最小值为 λ_2. 将其与 D 内部的极值 $f(0,0)$ 作比较,就得到 f 在 D 上的最大值为 $\max\{\lambda_1,0\} = \lambda_1$,最小值为 $\min\{\lambda_2,0\} = 0$.

类题 求函数 $f(x,y) = 2x^2 + 12xy + y^2$ 在区域 $x^2 + 4y^2 \leqslant 25$ 上的最大值与最小值(复旦大学).

注 6.9 从本例的求解过程可以看出,二元二次型 $f(x,y)$ 在圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 的最大值和最小值分别等于该二次型矩阵的最大特征根和最小特征根. 对一般情形,这个结论仍然成立,即二次型 $\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j (a_{ij} = a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ 上的最大值和最小值也分别等于该二次型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 的最大特征根和最小特征根.

例 6.54 椭球面 $\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ 被过原点的平面 $2x + y + z = 0$ 截成一个椭圆,求此椭圆的面积.

解 只要求出椭圆的长、短半轴即可. 设 (x,y,z) 是椭圆面上任一点,它到原点的距离为 $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,这样问题就转化为求 d^2 在约束条件 $\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} = 1$ 和 $2x + y + z = 0$ 下的最值问题.

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} - 1\right) + \mu(2x + y + z).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2x + \frac{2}{3}\lambda x + 2\mu = 0, & (1) \\ L_y = 2y + 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ L_z = 2z + \lambda z + \mu = 0, & (3) \\ L_\lambda = \frac{x^2}{3} + y^2 + \frac{z^2}{2} - 1 = 0, & (4) \\ L_\mu = 2x + y + z = 0. & (5) \end{cases}$$

在式(1)、式(2)、式(3)两边分别乘以 x,y,z 相加,并利用式(4)、式(5)可得

$$\lambda = -d^2.$$

将上式代入式(1)可得

$$(d^2-3)x=3\mu.$$

若 $d^2=3$,则 $\mu=0$. 代入式(2)、式(3)两式可得:$y=z=0$,再由式(5)可得:$x=0$. 这显然不满足式(4),所以 $d^2-3\neq 0$,于是

$$x=\frac{3\mu}{d^2-3}. \tag{6}$$

同理,将 $\lambda=-d^2$ 分别代入式(2)、式(3)可得

$$y=\frac{\mu}{2(d^2-1)},\qquad z=\frac{\mu}{d^2-2}. \tag{7}$$

将式(6)、式(7)代入式(5)可得

$$\frac{6\mu}{d^2-3}+\frac{\mu}{2(d^2-1)}+\frac{\mu}{d^2-2}=0.$$

消去 μ(因为 $\mu\neq 0$),整理可得

$$15(d^2)^2-49d^2+36=0. \tag{8}$$

因为函数 $d^2=x^2+y^2+z^2$ 在有界闭集 $D=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\frac{x^2}{3}+y^2+\frac{z^2}{2}=1,2x+y+z=0\right\}$ 上连续,所以 d^2 在 D 上一定存在最大值和最小值,且它们分别是方程(8)的大根和小根,即它们分别是椭圆的长、短半轴的平方. 由韦达(Viète)定理,有 $d_1^2\cdot d_2^2=\frac{36}{15}=\frac{12}{5}$,于是椭圆的面积为 $s=\pi d_1 d_2=2\pi\sqrt{\frac{3}{5}}$.

例 6.55　求 a,b 之值,使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$,且面积最小.

解　椭圆的面积 $S=\pi ab$. 先求 a,b 所满足的约束条件 $\varphi(a,b)=0$.

欲使 S 最小,必须要求椭圆与圆相切,在切点处纵坐标 y 值和斜率 y' 值应相等,即

$$\begin{cases}1-(x-1)^2=b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right), & (1)\\[2ex] -\dfrac{x-1}{y}=-\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{x}{y}. & (2)\end{cases}$$

从式(2)中解出 $x=\frac{a^2}{a^2-b^2}(a\neq b)$,代入式(1)可得:

$$\varphi(a,b)=a^2-a^2b^2+b^4=0.$$

构造拉格朗日函数

$$L(a,b,\lambda)=\pi ab-\lambda(a^2-a^2b^2+b^4).$$

由

$$\begin{cases} L_a = \pi b - 2\lambda a(1 - b^2) = 0, \\ L_b = \pi a - 2\lambda(2b^3 - a^2 b) = 0, \\ L_\lambda = -(a^2 - a^2 b^2 + b^4) = 0 \end{cases}$$

解之可得：$a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}, b = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

由于实际问题存在最小值，所以这唯一的极值点必是最小值点，最小值 $S_{\min} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.

例 6.56 求由方程

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2 = 0$$

所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 的极值.

解法 1 直接法. 对方程两边分别关于 x, y 求偏导：

$$\begin{cases} 2x + 6zz_x - 2y - 2yz_x = 0, & (1) \\ 4y + 6zz_y - 2x - 2z - 2yz_y = 0. & (2) \end{cases}$$

令 $z_x = z_y = 0$，可得

$$x = y, \quad 2y - x - z = 0.$$

由此得 $y = x, z = x$. 代入原方程可得：$x = \pm 1$，即有两个驻点 $(1,1,1)$ 和 $(-1,-1,-1)$.

在式(1)、式(2)两边再求偏导可得

$$\begin{cases} 1 + 3z_x^2 + (3z - y)z_{xx} = 0, \\ 3z_x z_y - 1 - z_x + (3z - y)z_{xy} = 0, \\ 2 + 3z_y^2 - 2z_y + (3z - y)z_{yy} = 0. \end{cases}$$

在驻点 $(1,1,1)$ 处算得：$A = z_{xx} = -\dfrac{1}{2}, B = z_{xy} = \dfrac{1}{2}, C = z_{yy} = -1$，

$\Delta = AC - B^2 = \dfrac{1}{4} > 0$，所以驻点 $(1,1,1)$ 为极大值点，极大值为 $z = 1$.

在驻点 $(-1,-1,-1)$ 处算得：$A = z_{xx} = \dfrac{1}{2}, B = z_{xy} = -\dfrac{1}{2}, C = z_{yy} = 1$，

$\Delta = AC - B^2 = \dfrac{1}{4} > 0$，所以驻点 $(-1,-1,-1)$ 为极小值点，极小值点为 $z = -1$.

解法 2 间接法. 取目标函数为 $f(x,y,z) = z$，约束条件为 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2 = 0$. 构造拉格朗日函数：

$$L(x,y,z,\lambda) = z + \lambda(x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz - 2).$$

令

$$\begin{cases} L_x = 2\lambda(x-y) = 0, & (3)\\ L_y = 2\lambda(2y-x-z) = 0, & (4)\\ L_z = 1+2\lambda(3z-y) = 0, & (5)\\ L_\lambda = x^2+2y^2+3z^2-2xy-2yz-2 = 0. & (6) \end{cases}$$

由式(5)可见，$\lambda \neq 0$. 于是可解出 $x=y=z=\pm 1, \lambda = \mp \frac{1}{4}$.

下面来判断驻点是否为极值点.

$$L_{xx}=2\lambda, L_{yy}=4\lambda, L_{zz}=6\lambda, L_{xy}=L_{yx}=-2\lambda,$$
$$L_{xz}=L_{zx}=0, L_{yz}=L_{zy}=-2\lambda.$$

在驻点(1,1,1)处，相应地 $\lambda = -\frac{1}{4}$，海色阵为

$$\boldsymbol{H}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

它的主对角线行列式为：$\Delta_1 = -\frac{1}{2} < 0, \Delta_2 = \frac{1}{4} > 0, \Delta_3 = -\frac{1}{4} < 0$，所以 $\boldsymbol{H}_1$ 负定，故驻点(1,1,1)为极大值点，极大值为 $z=1$.

在驻点(-1,-1,-1)处，相应地 $\lambda = \frac{1}{4}$，海色阵为

$$\boldsymbol{H}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

它的主对角线行列式为：$\Delta_1 = \frac{1}{2} > 0, \Delta_2 = \frac{1}{4} > 0, \Delta_3 = \frac{1}{4} > 0$，所以 $\boldsymbol{H}_2$ 正定，故驻点(-1,-1,-1)为极小值点，极小值为 $z=-1$.

例 6.57　设三角形的三个顶点分别位于曲线 $f(x,y)=0, \varphi(x,y)=0, \psi(x,y)=0$ 上. 求证：若三角形的面积达到极值，则曲线在三角形顶点处的法线都通过该三角形的垂心(华中工学院).

证明　如图 6-6 所示：

若三角形面积达到极值，即函数

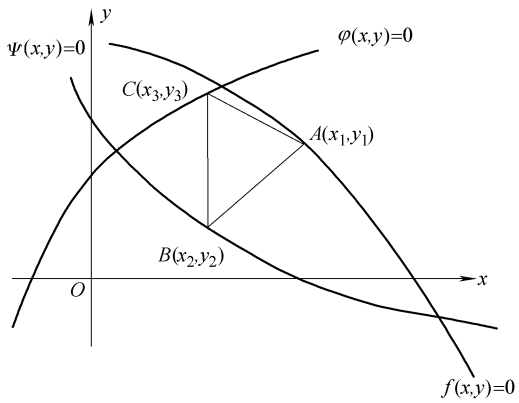


图 6-6　例 6.56 图

$$\Phi(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=x_1y_2+x_2y_3+x_3y_1-x_3y_2-x_2y_1-x_1y_3$$

在条件 $f(x_1,y_1)=0,\psi(x_2,y_2)=0,\varphi(x_3,y_3)=0$ 下达到极值.

构造拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$$
$$=\Phi(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3)+$$
$$\lambda_1 f(x_1,y_1)+\lambda_2\psi(x_2,y_2)+\lambda_3\varphi(x_3,y_3).$$

由取得极值的必要条件可知:

$$\begin{cases} L_{x_1}=y_2-y_3+\lambda_1\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0, & (1)\\ L_{y_1}=x_3-x_2+\lambda_1\dfrac{\partial f}{\partial y_1}=0, & (2)\\ L_{x_2}=y_3-y_1+\lambda_2\dfrac{\partial \psi}{\partial x_2}=0, & (3)\\ L_{y_2}=x_1-x_3+\lambda_2\dfrac{\partial \psi}{\partial y_2}=0, & (4)\\ L_{x_3}=y_1-y_2+\lambda_3\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_3}=0, & (5)\\ L_{y_3}=x_2-x_1+\lambda_3\dfrac{\partial \varphi}{\partial y_3}=0. & (6) \end{cases}$$

若 $\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$，由式(2)知，$x_2=x_3$. 由此知，$\triangle ABC$ 的 BC 边与 x 轴垂直，且曲线 $f(x,y)=0$ 上在点 A 处的切线平行于 y 轴，所以点 A 处曲线的法线与 BC 垂直，即点 A 处的法线过 $\triangle ABC$ 的垂心；

若 $\frac{\partial f}{\partial y_1}\neq 0$，则曲线 $f(x,y)=0$ 上点 A 处的切线斜率为

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{\partial f}{\partial x_1}\Big/\frac{\partial f}{\partial y_1}.$$

而 BC 边的斜率为 $k_{BC}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$. 由式(1)、式(2)易知，$k_{BC}=\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x_1}$，即曲线 $f(x,y)=0$ 在点 A 处的切线平行于 BC，从而点 A 处的法线过 $\triangle ABC$ 的垂心.

同理可证：点 B,C 处的法线也经过 $\triangle ABC$ 的垂心.

第七讲　多元函数的积分学

在这一讲中,我们将涉及含参变量积分特别是含参变量广义积分、重积分、曲线积分与曲面积分等重要内容. 这一讲侧重于计算和计算的技巧,但理论也将适当兼顾.

一、含参变量积分

1. 含参变量正常积分

(1)**连续性定理**　设$f(x,y)$在闭区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上连续.

(2)**积分次序交换定理**　设$f(x,y)$在闭区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则

$$\int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

(3)**可微性定理**　设$f(x,y)$,$f_y(x,y)$都在闭区域$D=[a,b]\times[c,d]$上连续,则$I(y)$在$[c,d]$上可微,且在$[c,d]$上成立

$$I'(y)=\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

又设$a(y)$,$b(y)$在$[c,d]$上可微,满足$a\leqslant a(y)\leqslant b$,$a\leqslant b(y)\leqslant b$,则

$$F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上可微,且成立

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x+f(b(y),y)b'(y)-f(a(y),y)a'(y).$$

注 7.1　由于连续性和可微性刻画的都是函数的局部性质,所以将定理中闭区间$[c,d]$改为开区间(c,d)(c可以是$-\infty$,d可以是$+\infty$),相应地连续性定理和可微性定理的结论在(c,d)上仍成立.

但可积性刻画的是函数的整体性质,一般不能将闭区间改为开区间. 例如,函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

在$[0,1]\times(0,1)$上连续. 易见

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

于是

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{1+x^2},x\in[0,1]$$

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}.$$

类似地,有

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=-\frac{\pi}{4}.$$

这表明积分次序不能交换.

(4)求参变量积分常用的方法

如果直接求 $I(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 有困难,常用如下两种方法:

1)先求 $I'(y)$,即先求$\int_a^b f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$,然后再对 y 积分求出 $I(y)$;

2)把 $f(x,y)$ 表示为积分形式,然后再交换积分的次序.

例 7.1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$.

解　这个题目在第五讲中我们曾经用狄尼定理做过(见例 5.30),在这里我们将用连续性定理来求解.

将离散变量 n 改成连续变量,即令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 0\leqslant x\leqslant 1,0<y\leqslant 1,\\[2ex] \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,y=0.\end{cases}$$

显然,$f(x,y)$ 在$[0,1]\times[0,1]$ 上连续,由连续性定理,有

$$\text{原极限}=\lim_{y\to 0^+}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.$$

例 7.2　设$f(x)$ 在$[0,1]$ 上连续,研究函数

$$F(t)=\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x$$

的连续性.

解 显然 $F(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$ 上有定义. 记 $h(x,t)=\dfrac{tf(x)}{x^2+t^2}$, $\forall t_0\in\mathbf{R}$ 且 $t_0\neq 0$. 由于 $h(x,t)$ 在$[0,1]\times[t_0-\delta,t_0+\delta]$(取 $\delta>0$ 适当小使 0 不属于 $[t_0-\delta,t_0+\delta]$) 上连续,所以根据连续性定理 $F(t)$ 在点 t_0 处连续.

下面讨论 $F(t)$ 在 $t_0=0$ 处的连续性. 先考虑

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=\lim_{t\to 0^+}\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

将积分分成两段来计算:

$$\int_0^1\frac{t}{x^2+t^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{t^{\frac{1}{3}}}+\int_{t^{\frac{1}{3}}}^1\triangleq I_1(t)+I_2(t),$$

而当 $t\to 0^+$ 时,

$$I_1(t)=f(\xi)\arctan\frac{t^{\frac{1}{3}}}{t}\to f(0)\,\frac{\pi}{2},$$

$$|I_2(t)|\leqslant M\frac{t}{t^{\frac{2}{3}}+t^2}\to 0,$$

其中 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}f(x)$. 因此,

$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=f(0)\,\frac{\pi}{2}.$$

同理可证

$$\lim_{t\to 0^-}F(t)=-f(0)\,\frac{\pi}{2}.$$

由此可见,仅当$f(0)=0$ 时,$F(t)$ 在 0 点连续,否则在 0 点不连续.

例 7.3 设 $a>0,b>0$,求$\displaystyle\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

解 当 $x\to 1^-$ 和 $x\to 0^+$ 时,被积函数趋向于0,所以积分是正常积分. 注意到

$$\frac{x^b-x^a}{\ln x}=\int_a^b x^y\,\mathrm{d}y,$$

则原积分可写成

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_a^b x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}y.$$

由于$f(x,y)=x^y\sin\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$(设 $a<b$) 上连续,所以积分次序可交换,即

$$I=\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

记 $I(y)=\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$，连续使用分部积分法可得

$$\begin{aligned}I(y)&=\frac{x^{y+1}}{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{x^{y+1}}{(y+1)^2}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{(y+1)^2}-\frac{1}{(y+1)^2}I(y),\end{aligned}$$

即

$$I(y)=\frac{1}{1+(y+1)^2}.$$

于是

$$I=\int_a^b\frac{\mathrm{d}y}{1+(y+1)^2}=\arctan(b+1)-\arctan(a+1).$$

例 7.4　计算 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\mathrm{d}x\quad(|a|<1)$.

解　记 $f(x,a)=\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}$. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x,a)=a$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}f(x,a)=0$，所以积分 I 为正常积分. 若补充定义

$$f(x,a)=\begin{cases}0, & x=\frac{\pi}{2},\\ \frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}, & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ a, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x,a)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(-1,1)$ 上连续. 而显然

$$f_a(x,a)=\begin{cases}\frac{1}{1+a^2\tan^2x}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

也在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(-1,1)$ 上连续. 由可微性定理，有

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\tan^2x}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+a^2u^2)(1+u^2)}\quad(\text{令 }u=\tan x)$$

$$= \frac{1}{a^2-1}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{u^2+\frac{1}{a^2}}-\frac{1}{u^2+1}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a^2-1}(|a|-1) = \begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1+a}, & a\geqslant 0,\\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{1-a}, & a<0.\end{cases}$$

由于 $a=0$ 时,$I(a)=0$, 所以

当 $a\geqslant 0$ 时,$I(a)=\frac{\pi}{2}\ln(1+a)$;当 $a<0$ 时,$I(a)=-\frac{\pi}{2}\ln(1-a)$.

注 7.2 从本例的求解过程可以看出,有时连续性条件并不满足,需要人为地补充个别点的定义,使之符合积分号下求导(求积分)的条件.

例 7.5 设 $f(t)=\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2$, $g(t)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2}\mathrm{d}x$. 证明:$f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}$, 并由此计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

证明 由可微性定理,有

$$f'(t)=2\mathrm{e}^{-t^2}\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^t \mathrm{e}^{-(t^2+x^2)}\mathrm{d}x,$$

$$g'(t)=-2\int_0^1 \mathrm{e}^{-(1+x^2)t^2}t\mathrm{d}x=-2\int_0^1 \mathrm{e}^{-(t^2+x^2t^2)}\mathrm{d}(xt),$$

令 $xt=y$,则 $g'(t)=-2\int_0^t \mathrm{e}^{-(t^2+y^2)}\mathrm{d}y=-f'(t)$,

或

$$f'(t)+g'(t)=0.$$

对上式两边从 0 到 t 积分可得

$$f(t)+g(t)=\frac{\pi}{4}.$$

令 $t\to+\infty$, 有

$$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2=\frac{\pi}{4},\quad \text{即}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. 含参变量广义积分

含参变量无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 与函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 都是对函数的求"和"问题,前者是连续的求和,后者是离散的求和. 因此,它们的一致收敛定义及判别法和各种性质都是平行的,希望同学们将其作以比较.

(1)含参变量无穷积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛是指: $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0>a$,

$\forall A > A_0, \forall x \in I$, 有

$$\left| \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| = \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right| < \varepsilon.$$

$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 I 上不一致收敛是指：$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > a, \exists A' > A, \exists x' \in I$, 使得

$$\left| \int_{A'}^{+\infty} f(x',y)\,\mathrm{d}y \right| \geqslant \varepsilon_0.$$

命题 7.1　含参变量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛的充要条件是 $\lim\limits_{A\to+\infty} \eta(A) = 0$, 其中 $\eta(A) = \sup\limits_{x\in I} \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right|$.

(2)判定含参变量广义积分一致收敛的判别法

1)柯西收敛准则;2)M 判别法(优函数判别法);3)阿贝尔判别法(简称 A-法);4)狄利克莱判别法(简称 D-法);

5)**狄尼定理**:设 $f(x,y)$ 在 $D = [\alpha,\beta] \times [a, +\infty)$ 上连续且不变号, $\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛.

(3)判断含参变量广义积分不一致收敛常用的方法:1)按定义;2)按柯西准则,即 $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > a, \exists A', A'' > A$ 及 $x' \in I$, 使得

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x',y)\,\mathrm{d}y \right| \geqslant \varepsilon_0;$$

3)若 $f(x,y)$ 在 $I \times [a, +\infty)$ 上连续, x_0 是 I 的一个聚点, $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $I\backslash\{x_0\}$ 上收敛,但 $\int_a^{+\infty} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$ 发散,则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 I 上不一致收敛(用反证法,结合柯西准则易证);

4) 狄尼定理,即 $f(x,y)$ 在 $D = [\alpha,\beta] \times [a, +\infty)$ 上连续, $\varphi(x) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上存在但不连续,则 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上不一致收敛.

(4)含参变量积分的分析性质

1)**连续性**　设 $f(x,y)$ 在 $D = [\alpha,\beta] \times [a, +\infty)$ 上连续,且 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛于 $\varphi(x)$,则 $\varphi(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,即 $\forall x_0 \in [\alpha,\beta]$, 有

$$\lim_{x\to x_0} \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^{+\infty} \lim_{x\to x_0} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

2)**可微性**　设 $f(x,y), f_x(x,y)$ 在 D 上连续,而 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上收敛

于 $\varphi(x)$,$\int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$ 在$[\alpha,\beta]$ 上一致收敛,则 $\varphi(x)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上可微,且

$$\varphi'(x) = \int_a^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y.$$

3)**积分可交换性** 在连续性定理的条件下,$\varphi(x)$ 在$[\alpha,\beta]$ 上可积,且

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_\alpha^\beta f(x,y)\mathrm{d}x.$$

对于$[\alpha,+\infty)\times[a,+\infty)$ 的情形,有:若$f(x,y)$ 在$[\alpha,+\infty)\times[a,+\infty)$ 上连续,而

$$\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

分别在任意有限区间$[\alpha,\beta]$ 与$[a,b]$ 上一致收敛. 又积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}y \text{ 与 } \int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_\alpha^{+\infty}|f(x,y)|\mathrm{d}x$$

中至少有一个存在,则积分

$$\int_\alpha^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y \text{ 与} \int_a^{+\infty}\mathrm{d}y\int_\alpha^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

都存在且两者相等.

对无界函数的含参变量积分也有类似的结果.

例 7.6 证明:$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$. 1) 在$[\alpha_0,+\infty)(\alpha_0>0)$ 上一致收敛;2) 在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛(南开).

证明 当$\alpha>0$ 时,令 $\alpha x = u$,则 $\forall A>0$,有

$$\int_A^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha^2}\int_{A\alpha}^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2}(u+1)\mathrm{e}^{-u}\Big|_{A\alpha}^{+\infty} = \frac{A}{\alpha}\mathrm{e}^{-A\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\mathrm{e}^{-A\alpha}.$$

1)显然 $\eta(A) = \sup\limits_{\alpha\in[\alpha_0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right| = \frac{A}{\alpha_0}\mathrm{e}^{-A\alpha_0}+\frac{1}{\alpha_0^2}\mathrm{e}^{-A\alpha_0}$,且 $\lim\limits_{A\to+\infty}\eta(A)=0$,由命题 7.1 知,$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在$[\alpha_0,+\infty)$ 上一致收敛.

2)显然 $\eta(A) = \sup\limits_{\alpha\in(0,+\infty)}\left|\int_A^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x\right| = +\infty$,故由命题 7.1 知,$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛

类题 试证广义积分 $J=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-yx}\mathrm{d}x$ 在区间$0<a\leqslant y\leqslant b$ 内一致收敛,而在区间$0\leqslant y\leqslant b$ 内非一致收敛(中科院).

例 7.7 证明:积分 $\int_1^{+\infty} x^{-\lambda}\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

证明　$\forall A > 1$，$\left|\int_1^A e^{\sin x}\sin 2x\mathrm{d}x\right| = 2\left|\int_{\sin 1}^{\sin A} ue^u\mathrm{d}u\right| = 2\left|(u-1)e^u\Big|_{\sin 1}^{\sin A}\right|$ 有界，而当 $\lambda > 0$ 时，$x^{-\lambda}$ 单调趋向于0(关于 x)，所以由狄利克雷判别法知，积分收敛.

但对适当大的自然数 n，有

$$\begin{aligned}\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin x}\cdot\sin 2x}{x^\lambda}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin t}\sin 2t}{(2n\pi+t)^\lambda}\mathrm{d}t\\ &\geqslant \frac{1}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin t}\sin 2t\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^\lambda}\to 2 \quad (\text{当}\ \lambda\to 0^+\ \text{时}),\end{aligned}$$

故对任意大的自然数 n，都存在 $\lambda > 0$，使上式不小于1. 由柯西准则知，积分在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

类题　证明 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin xy}{x}\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛，但在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

提示　1)用 D-法；

2)用柯西准则. 取 $A' = n\pi, A'' = \frac{3}{2}n\pi, y' = \frac{1}{n}, n\in\mathbf{N}_+$，考察

$$\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin xy'}{x}\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\frac{x}{n}}{x}\mathrm{d}x\right| > \frac{2}{3n\pi}\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{x}{n}\mathrm{d}x\right| = \frac{2}{3\pi}.$$

例 7.8　证明：$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x$ 关于 p 在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

证明　只要证明：$\forall[p_0,p_1]\subset(-1,1)$，积分在 $[p_0,p_1]$ 上都一致收敛即可. 由于 $x=0$ 是奇点，所以需要将积分分开：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x^2}{x^p}\mathrm{d}x = \int_0^1 + \int_1^{+\infty} \xlongequal{\triangle} I_1 + I_2.$$

对 I_1 而言，注意到

$$\left|\frac{\cos x^2}{x^p}\right| \leqslant \frac{1}{x^p} \leqslant \frac{1}{x^{p_1}}, \quad 0 < x \leqslant 1, \quad p\in[p_0,p_1],$$

由于 $p_1 < 1$，所以 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^{p_1}}$ 收敛. 这样，由 M 判别法知，I_1 在 $[p_0,p_1]$ 上一致收敛.

对 I_2 而言，作变换 $t = x^2$，则

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}\mathrm{d}t.$$

由于 $\forall A > 1$, $\left|\int_1^A \cos t\,\mathrm{d}t\right| = |\sin A - \sin 1| \leqslant 2$ 一致有界. 而

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}} \leqslant \frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p_0+1)}} \quad (t \geqslant 1, p \in [p_0, p_1]),$$

注意到 $p_0 + 1 > 0$, 所以当 $t \to +\infty$ 时, $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p_0+1)}} \to 0$, 从而 $\frac{1}{t^{\frac{1}{2}(p+1)}}$ 关于 p 一致地趋向于 0. 由 D-法知, I_2 在 $[p_0, p_1]$ 上一致收敛.

综上可知, 所论积分在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

例 7.9 证明: $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 对 $\alpha \in [0,b]\ (0 < b < 1)$ 一致收敛.

证明 这个积分有无穷多个奇点, 所以需要将这个积分写成级数形式.

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{|\sin x|^{\alpha}}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\mathrm{d}t \quad (\text{令 } x = n\pi + t) \\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t}\mathrm{d}t\right] \\ &\overset{\triangle}{=\!=} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}} [I_1 + I_2]. \end{aligned}$$

对 I_1 而言, $t = 0$ 为奇点. 由 $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t} \leqslant \frac{1}{\sin^{b} t}$ 及 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^{b} t}$ $(b < 1)$ 的收敛性知, I_1 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

对 I_2 而言, $t = \pi$ 为奇点. 由 $\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^{\alpha} t} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{\sin^{b} t}$ 及 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sin^{b} t}$ $(b < 1)$ 的收敛性知, I_2 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

综上知, $I(\alpha)$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛.

例 7.10 讨论函数

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)}\mathrm{d}x$$

的连续区间.

解 先确定 $I(\alpha)$ 的定义域, 即积分的收敛范围.

显然, $x = 0, x = +\infty$ 是可能的奇点.

当 $x \to 0$ 时, $\frac{\arctan x}{x^{\alpha}(2+x^3)} \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$, 由此可见, 当 $\alpha - 1 < 1$, 即 $\alpha < 2$ 时, 积

分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 收敛.

当 $x\to+\infty$ 时,$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)} \sim \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+3}}$,由此可见,当 $\alpha+3>1$,即 $\alpha>-2$ 时,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 收敛.

综合起来可知,$I(\alpha)$ 的定义域为 $(-2,2)$.

下面将证明 $I(\alpha)$ 在 $(-2,2)$ 上连续.为此只需证明 $I(\alpha)$ 在 $(-2,2)$ 上内闭一致收敛,即 $\forall [a,b]\subset(-2,2)$,$I(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛即可.

当 $x\in(0,1)$ 时,对 $\alpha\leqslant b<2$,存在正常数 $C>0$,使得

$$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)} \leqslant \frac{C}{x^{\alpha-1}} \leqslant \frac{C}{x^{b-1}}.$$

注意到 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{b-1}}$ $(b-1<1)$ 收敛,故由 M 判别法知,积分 $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,b]$ 上一致收敛.

当 $x\in[1,+\infty)$ 时,对 $-2<a\leqslant\alpha$,有

$$\frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+3}} \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x^{a+3}}.$$

由 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{a+3}}$ $(a+3>1)$ 收敛,利用 M 判别法知,积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha(2+x^3)}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.综合起来,即知 $I(\alpha)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,从而 $I(\alpha)$ 在 $(-2,2)$ 上连续.

例 7.11　设

$$F(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\mathrm{d}t, b\neq 0.$$

证明:1) $F(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续;2) $F(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导;3)求 $F(a)$.

证明　由于 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})=a$,所以 $t=0$ 不是奇点.

1)　令

$$f(t,a)=\begin{cases}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt, & t>0,a\geqslant 0,\\ a, & t=0,a\geqslant 0,\end{cases}$$

则 $f(t,a)$ 在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续.若记

$$F(a)=\int_0^1\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}(1-\mathrm{e}^{-at})\cos bt\mathrm{d}t \overset{\triangle}{=\!=} F_1+F_2,$$

则由注 7.1 知,F_1 在 $[0,+\infty)$ 上连续.而对 F_2,由 $b\neq0$ 知,$\int_1^{+\infty}\frac{\cos bt}{t}\mathrm{d}t$ 关于 $a\in$

$[0,+\infty)$ 一致收敛(至于它的收敛性可用 D-法证明,因为它与 a 无关,所以这种收敛关于 a 是一致的),又 $1-e^{-at}$ 关于 t 单调且 $|1-e^{-at}|\leqslant 2$ 一致有界,故由 A-法知,F_2 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛,从而在 $[0,+\infty)$ 上连续. 综上知,$F(a)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

2)由 $f_a(t,a)=e^{-at}\cos bt, t\geqslant 0, a\geqslant 0$ 知,$f(t,a)$ 与 $f_a(t,a)$ 都在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续,且 $\forall \varepsilon>0$,当 $a\geqslant\varepsilon$ 时,有

$$|f_a(t,a)|\leqslant e^{-at}\leqslant e^{-\varepsilon t}, t\in[0,+\infty).$$

由 $\int_0^{+\infty}e^{-\varepsilon t}dt$ 的收敛性,利用 M 判别法可知,$\int_0^{+\infty}f_a(t,a)dt$ 关于 $a\in[\varepsilon,+\infty)$ 一致收敛. 于是 $F(a)$ 在 $[\varepsilon,+\infty)$ 上可导,由 ε 的任意性知 $F(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导,且

$$F'(a)=\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos bt dt,\quad a\in(0,+\infty).$$

3)分部积分可得:

$$F'(a)=\frac{e^{-at}}{a^2+b^2}(b\sin bt-a\cos bt)\Big|_0^{+\infty}=\frac{a}{a^2+b^2}, a>0.$$

注意到 $F(0)=0$,对上式两边关于 a 积分可得:

$$F(a)=\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right).$$

例 7.12 设

$$g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx.$$

1)求 $g'(\alpha)$(北师大);

2)计算 $g(\alpha)$(河南师大).

解 1) $x=1$ 和 $x=+\infty$ 为奇点. 记

$$f(x,\alpha)=\frac{\arctan(\alpha x)}{x^2\sqrt{x^2-1}},$$

则

$$f_\alpha(x,\alpha)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)},$$

显然 $f(x,\alpha)$ 与 $f_\alpha(x,\alpha)$ 均在 $(1,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$ 上连续.

对积分 $\int_1^{+\infty}f(x,\alpha)dx$,当 $x\to 1^+$ 时,$f(x,\alpha)\sim\frac{\arctan\alpha}{\sqrt{2(x-1)}}$;当 $x\to+\infty$ 时,$f(x,\alpha)\sim\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\frac{1}{x^3}$. 由此可知,$g(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛.

对积分 $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x$. 由

$$\left|\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)}\right| \leqslant \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \forall \alpha \in (-\infty,+\infty),$$

及 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的收敛性,利用 M 判别法可知, $\int_1^{+\infty} f_\alpha(x,\alpha)\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上关于 α 一致收敛. 于是,由可微性定理,有

$$\begin{aligned} g'(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2\sqrt{x^2-1}(1+\alpha^2x^2)} \\ &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t-1}(1+\alpha^2t)} \qquad (\text{令 } t=x^2) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)[(1+\alpha^2)+\alpha^2u^2]} \quad (\text{令 } u=\sqrt{t-1}) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{|\alpha|}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right). \end{aligned}$$

2)因为 $g(\alpha) = -g(-\alpha)$,所以 $g(\alpha)$ 是关于 α 的奇函数,因此只需考虑 $\alpha \geqslant 0$ 的情形即可. 此时, $g'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right)$.

注意到 $g(0)=0$,于是当 $\alpha \geqslant 0$ 时,有

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= g(\alpha)-g(0) = \int_0^{\alpha} g'(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\alpha}\left(1-\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}(\alpha+1-\sqrt{1+\alpha^2}). \end{aligned}$$

故

$$g(\alpha) = \frac{\pi}{2}(|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2})\operatorname{sgn}\alpha, \quad \alpha \in (-\infty,+\infty).$$

例 7.13　1)计算狄利克雷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$;

2)计算 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$　(南大).

解　引入收敛因子 $\mathrm{e}^{-\alpha x}(\alpha \geqslant 0)$,即令

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

因为 $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}=0$, 所以 $x=0, x=+\infty$ 不是奇点. 记

$$f(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x},$$

则

$$f_\alpha(x,\alpha)=-e^{-\alpha x}\sin x.$$

显然 $f(x,\alpha)$, $f_\alpha(x,\alpha)$ 都在 $[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 上连续, 由 A-法易知, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}dx$ 收敛(实际上关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的). 再由

$$|f_\alpha(x,\alpha)|=|e^{-\alpha x}\sin x|\leqslant e^{-\alpha x},\quad \alpha>0$$

知, 积分 $\int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}\right)'_\alpha dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛. 故由可微性定理, 有

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x dx=-\frac{1}{1+\alpha^2}.$$

两边关于 α 积分可得

$$I(\alpha)=-\arctan\alpha+C,\quad \alpha>0. \tag{1}$$

注意到

$$|I(\alpha)|\leqslant\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\leqslant\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}dx=\frac{1}{\alpha}\to 0\quad(\text{当}\ \alpha\to+\infty\ \text{时}),$$

在式(1)中令 $\alpha\to+\infty$ 可得: $C=\dfrac{\pi}{2}$. 故

$$I(\alpha)=\frac{\pi}{2}-\arctan\alpha,\quad \alpha>0. \tag{2}$$

1)由于 $f(x,\alpha)=e^{-\alpha x}\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $[0,+\infty)\times[0,1]$ 上连续, 所以 $I(\alpha)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 从而

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=I(0)=\lim_{\alpha\to 0^+}I(\alpha)=\frac{\pi}{2}.$$

2)在式(2)中, 令 $\alpha=1$ 可得:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{4}.$$

例 7.14 设 $I(\alpha,\beta)=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^4}{\alpha^2+\beta^2}}dt$, 其中 α,β 满足不等式 $\alpha^2-2\alpha+\beta^2\leqslant-\dfrac{3}{4}$.

(1)讨论含参变量积分 $I(\alpha,\beta)$ 在区域 D: $\alpha^2-2\alpha+\beta^2\leqslant-\dfrac{3}{4}$ 上的一致收敛性;

(2)求 $I(\alpha,\beta)$ 在区域 D 上的最小值(南大).

解　(1)记 $d(\alpha,\beta)=\alpha^2+\beta^2$. 通过计算可知, $d(\alpha,\beta)$ 在 D 上的最大值为 $\frac{9}{4}$. 于是,当 $(\alpha,\beta)\in D$ 时,有

$$0\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{t^4}{\alpha^2+\beta^2}}\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{4t^4}{9}}.$$

由 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{4t^4}{9}}\mathrm{d}t$ 的收敛性,利用 M 判别法知 $I(\alpha,\beta)$ 在 D 上一致收敛.

(2)令 $\frac{t^4}{\alpha^2+\beta^2}=s$,则 $t=s^{\frac{1}{4}}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{4}}$, $\mathrm{d}t=\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{4}}s^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}s$,

$$I(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{4}}\int_0^{+\infty}s^{-\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-s}\mathrm{d}s=\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

由此可见,欲求 $I(\alpha,\beta)$ 在 D 上的最小值,只需求 $d(\alpha,\beta)$ 在 D 上的最小值即可. 显然 $d(\alpha,\beta)$ 在 D 内无驻点,因此在 D 内无最值. 下面只需求圆周 $(\alpha-1)^2+\beta^2=\frac{1}{4}$ 上的最小值即可. 为此,令

$$L(\alpha,\beta,\lambda)=\alpha^2+\beta^2+\lambda\left[(\alpha-1)^2+\beta^2-\frac{1}{4}\right].$$

让

$$\begin{cases}L_\alpha=2\alpha+2\lambda(\alpha-1)=0,\\ L_\beta=2\beta+2\lambda\beta=0,\\ L_\lambda=(\alpha-1)^2+\beta^2-\frac{1}{4}=0,\end{cases}$$

解出驻点 $\left(\frac{1}{2},0\right),\lambda=1$ 和驻点 $\left(\frac{3}{2},0\right),\lambda=-3$. 由此可知, $d(\alpha,\beta)$ 的最小值为 $\frac{1}{4}$. 这样就可得到 $I(\alpha,\beta)$ 在 D 上的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.

例 7.15　求 $g(\alpha)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2\alpha x\mathrm{d}x$　$\left(\text{已知 } g(0)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$(复旦).

解　由 $|\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2\alpha x|\leqslant \mathrm{e}^{-x^2}$, $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 及 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性知, $g(\alpha)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛. 又由

$$\left|\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2\alpha x)\right|\leqslant 2x\mathrm{e}^{-x^2}$$

及 $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$ 的收敛性知,积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathrm{e}^{-x^2}\cos 2\alpha x)\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛. 由可微性定理,有

$$g'(\alpha)=-2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\sin 2\alpha x\mathrm{d}x$$

$$= e^{-x^2}\sin 2\alpha x \Big|_0^{+\infty} - 2\alpha\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x dx$$
$$= -2\alpha g(\alpha),$$

即

$$g'(\alpha) = -2\alpha g(\alpha), g(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

解此常微分方程可得

$$g(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

例 7.16 设 $a > 0, b > 0$. 试用含参变量积分的性质证明：

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

(天津大学).

证法 1 设 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx$, 即视 b 为参变量.

由 $|e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}| \leqslant e^{-ax^2}, b > 0$ 及 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx$ 的收敛性知, $I(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上关于 b 一致收敛.

显然 $e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}$ 及 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}) = -\frac{1}{x^2}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}$ 都在 $(0, +\infty)\times(0, +\infty)$ 上连续, 且 $\forall b_0 > 0$, 当 $b \geqslant b_0$ 时, 有

$$\left|-\frac{1}{x^2}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}e^{-\frac{b_0}{x^2}}.$$

而

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-\frac{b_0}{x^2}}dx \xlongequal{令\, t = \frac{1}{x}} \int_0^{+\infty} e^{-b_0t^2}dt$$

收敛, 由 M 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}})dx$ 关于 b 在 $[b_0, +\infty)$ 上一致收敛. 故 $I(b)$ 在 $(0, +\infty)$ 上可在积分号下求导, 且

$$I'(b) = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx$$
$$= -\sqrt{\frac{a}{b}}\int_0^{+\infty} e^{-at^2-\frac{b}{t^2}}dt \quad \left(令\, x = \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{t}\right)$$
$$= -\sqrt{\frac{a}{b}}I(b).$$

解此微分方程可得: $I(b) = Ce^{-2\sqrt{ab}}, b > 0$. 利用 $I(b)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续可得

$$\lim_{b\to 0^+} I(b) = I(0) = C = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

故

$$I(b) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

注 7.3　以上两个例题均是通过解方程而求得的,这是处理含参变量广义积分常用的手段,请同学们注意领会.

对例 7.17 若不用含参变量积分的性质,而直接利用适当的变量替换来作更简单.

证法 2　令 $x = \sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{t}$,则 $dx = -\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{1}{t^2}dt$,

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx = \sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{+\infty} e^{-at^2-\frac{b}{t^2}}\frac{1}{t^2}dt.$$

另一方面,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} e^{-\left(ax^2-2\sqrt{ab}+\frac{b}{x^2}\right)-2\sqrt{ab}}dx \\
&= e^{-2\sqrt{ab}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}dx \\
&= e^{-2\sqrt{ab}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}d\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)-\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}\frac{dx}{x^2}\right] \\
&= e^{-2\sqrt{ab}}\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)^2}d\left(\sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right)-\sqrt{\frac{b}{a}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{ab}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy - I \quad \left(\text{在第一积分中作了变换 } y = \sqrt{a}x-\frac{\sqrt{b}}{x}\right),
\end{aligned}$$

所以

$$2I = \frac{1}{\sqrt{a}}e^{-2\sqrt{ab}}\sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}},$$

即

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}.$$

例 7.17　设函数 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续,如果积分 $\int_0^{+\infty} t^{\lambda}f(t)dt$ 在 $\lambda = a$ 和 $\lambda = b$ 时收敛 $(a<b)$,则 $\int_0^{+\infty} t^{\lambda}f(t)dt$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛(复旦).

证明　由于 $\int_0^{+\infty} t^{\lambda}f(t)dt = \int_0^1 t^{\lambda}f(t)dt + \int_1^{+\infty} t^{\lambda}f(t)dt$,所以只要证明 $\int_0^1 t^{\lambda}f(t)dt$

与 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$ 都在 $[a,b]$ 上一致收敛即可.

由 $\int_1^{+\infty} t^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ 收敛可知, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 \geqslant 1$, 当 $A_2 > A_1 > A_0$ 时, 有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} t^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon.$$

于是, 由第二积分中值定理, 有

$$\begin{aligned} \left| \int_{A_1}^{A_2} t^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t \right| &= \left| \int_{A_1}^{A_2} t^{\lambda - b} \cdot t^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \\ &= A_1^{\lambda - b} \left| \int_{A_1}^{\xi} t^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \right| \quad (\xi \geqslant A_1) \\ &\leqslant \left| \int_{A_1}^{\xi} t^{b} f(t)\,\mathrm{d}t \right| < \varepsilon, \end{aligned}$$

这表明 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

同理, 由 $\int_0^1 t^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ 的收敛性可证 $\int_0^1 t^{\lambda} f(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

例 7.18 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可积, 则

$$\lim_{y \to 0^+} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(东北工学院).

证明 先证明 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,\eta]$ 上一致收敛.

事实上, 由 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 (即 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 一致收敛) 及 e^{-xy} 关于 x 单调 ($\forall y \in [0,\eta]$ 固定) 且 $|\mathrm{e}^{-xy}| \leqslant 1$. 根据 A-法, $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0,\eta]$ 上一致收敛. 于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > 0$, 当 $A \geqslant A_0$ 时, $\forall y \in [0,\eta]$ 有

$$\left| \int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon/3.$$

特别地, 有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon/3.$$

由 $f(x)$ 在 $[0,A_0]$ 上可积可知, 它在 $[0,A_0]$ 上有界, 即 $\exists M > 0, \forall x \in [0,A_0]$, 有 $|f(x)| \leqslant M$. 又因为 $\lim\limits_{y \to 0^+} \mathrm{e}^{-xy} = 1$, 所以对上述 $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $y \in (0,\delta)$ 时, $\forall x \in [0,A_0]$, 有

$$|\mathrm{e}^{-xy} - 1| < \frac{\varepsilon}{3MA_0}.$$

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $y \in (0,\delta)$ 时, 有

$$\left|\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)\,dx - \int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right|$$

$$= \int_0^{A_0} |e^{-xy} - 1| \cdot |f(x)|\,dx + \left|\int_{A_0}^{+\infty} e^{-xy}f(x)\,dx\right| + \left|\int_{A_0}^{+\infty} f(x)\,dx\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3MA_0} \cdot MA_0 + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即

$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-xy}f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} f(x)\,dx.$$

下面看一个难度较大的题目.

例 7.19　设 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义,在任意有限区间 $[a,b]$ 上有界并可积,且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < +\infty$. 又设 α 为一实常数 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. 证明:积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx$ 收敛且函数 $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx$ 连续　(北大).

证明　(1)证明积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx$ 收敛.

$\forall t \in (-\infty, +\infty)$ (固定),将积分分开,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx = \int_{|x-t|\geqslant 1} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx + \int_{|x-t|<1} \frac{f(x)}{|x-t|^\alpha}dx$$

$$\xlongequal{\triangle} I_1 + I_2.$$

注意到 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$, 由施瓦茨不等式,有

$$|I_1| \leqslant \int_{|x-1|\geqslant 1} \frac{|f(x)|}{|x-t|^\alpha}dx \leqslant \left(\int_{|x-t|\geqslant 1} |f(x)|^2 dx \cdot \int_{|x-t|\geqslant 1} \frac{1}{|x-t|^{2\alpha}}dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{|x-t|\geqslant 1} \frac{1}{|x-t|^{2\alpha}}dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

而

$$\int_{|x-t|\geqslant 1} \frac{1}{|x-t|^{2\alpha}}dx = \int_{-\infty}^{t-1} \frac{1}{|x-t|^{2\alpha}}dx + \int_{t+1}^{+\infty} \frac{1}{|x-t|^{2\alpha}}dx$$

$$= \frac{2}{2\alpha - 1}.$$

由式(1)知,

$$|I_1| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{2\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

即 I_1 收敛.

又因为

$$\int_{|x-t|<1}\frac{1}{|x-t|^{\alpha}}\mathrm{d}x=\int_{t-1}^{t}\frac{\mathrm{d}x}{(t-x)^{\alpha}}+\int_{t}^{t+1}\frac{\mathrm{d}x}{(x-t)^{\alpha}}=\frac{2}{1-\alpha},$$

所以 $\int_{|x-t|<1}\frac{1}{|x-t|^{\alpha}}\mathrm{d}x$ (绝对)收敛.

由已知条件, $f(x)$ 在有限区间 $[t-1,t+1]$ 上可积, 所以 $\frac{f(x)}{|x-t|^{\alpha}}$ 在 $[t-1,t+1]$ 上可积,即 I_2 收敛. 综上知积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(x)}{|x-t|^{\alpha}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2)证明 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x+\int_{t}^{+\infty}\frac{f(x)}{(x-t)^{\alpha}}\mathrm{d}x\overset{\triangle}{=\!=}\varphi_1(t)+\varphi_2(t).$$

欲证 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,只须证 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续.

显然, $\forall t_0\in(-\infty,+\infty)$, 只须证 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 在点 t_0 连续即可.

下证: $\varphi_1(t)$ 在点 t_0 连续,为此先证 $\lim\limits_{t\to t_0^+}\varphi_1(t)=\varphi_1(t_0)$.

设 $t\in[t_0,t_0+1]$ 及 $|f(x)|\leqslant M_0, x\in[t_0-1,t_0+1]$, 考察

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(t)-\varphi_1(t_0)|&=\left|\int_{-\infty}^{t}\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{t_0}\frac{f(x)}{(t_0-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x\right|\\
&=\left|\int_{-\infty}^{t}\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{t_0}\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x+\right.\\
&\quad\left.\int_{-\infty}^{t_0}\frac{f(x)}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{t_0}\frac{f(x)}{(t_0-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\int_{t_0}^{t}\frac{|f(x)|}{(t-x)^{\alpha}}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{t_0}|f(x)|\cdot\left|\frac{1}{(t-x)^{\alpha}}-\frac{1}{(t_0-x)^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x\\
&\leqslant M_0\int_{t_0}^{t}\frac{\mathrm{d}x}{(t-x)^{\alpha}}+\int_{-\infty}^{t_0-1}|f(x)|\cdot\left|\frac{1}{(t-x)^{\alpha}}-\frac{1}{(t_0-x)^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x+\\
&\quad M_0\int_{t_0-1}^{t_0}\left|\frac{1}{(t-x)^{\alpha}}-\frac{1}{(t_0-x)^{\alpha}}\right|\mathrm{d}x\\
&\overset{\triangle}{=\!=}J_1+J_2+J_3.
\end{aligned}$$

而

$$J_1=M_0\frac{(t-t_0)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\to 0\quad(t\to t_0^+),$$

$$J_3=\frac{M_0}{1-\alpha}[1+(t-t_0)^{1-\alpha}-(t-t_0+1)^{1-\alpha}]\to 0\quad(t\to t_0^+).$$

注意到不等式: $a>b>0$,有 $(a-b)^2\leqslant a^2-b^2$. 利用施瓦茨不等式,有

$$0 \leqslant J_2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{t_0-1} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{t_0-1} \left(\frac{1}{(t_0-x)^{2\alpha}} - \frac{1}{(t-x)^{2\alpha}}\right)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \mathrm{d}x\right)\left[\frac{1}{2\alpha-1}(1-(t-t_0+1)^{1-2\alpha})\right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad (t \to t_0^+),$$

综上可知，$\lim\limits_{t\to t_0^+}\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0)$. 用完全类似的方法可证 $\lim\limits_{t\to t_0^-}\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0)$，故 $\varphi_1(t)$ 在 t_0 点连续.

同理可证 $\varphi_2(t)$ 也在点 t_0 连续. 从而 $\varphi(t)$ 在点 t_0 连续.

注 7.4　本例的条件不满足含参变量广义积分连续性定理的条件，因此我们只好改用连续函数定义加以证明.

3. 特殊函数——B 函数与 Γ 函数.

(1) $\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x, p>0, q>0$ 称为 **Beta 函数**或**第一类欧拉积分**. 它的等价形式有：

$$\mathrm{B}(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1}\varphi \sin^{2q-1}\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

由此可得

$$\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi.$$

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+1}}\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \frac{y^{q-1}}{(1+y)^{p+q}}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{y^{p-1}+y^{q-1}}{(1+y)^{p+1}}\mathrm{d}y.$$

B 函数的性质：

1) $\mathrm{B}(p,q)$ 函数在其定义域 $p>0, q>0$ 上连续且有任意阶连续偏导数；

2)对称性：$\mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)$；

3)递推关系式：

$$\mathrm{B}(p,q+1) = \frac{q}{p+q}\mathrm{B}(p,q), \quad \mathrm{B}(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\mathrm{B}(p,q).$$

如果 m,n 都是自然数，则

$$\mathrm{B}(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}.$$

(2) $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x, s>0$ 称为 **Gamma 函数**或**第二类欧拉积分.** 它的等价形式有：

$$\Gamma(s) = 2\int_0^{+\infty} x^{2s-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

由此可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}.$$

$$\Gamma(s)=\alpha^s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-\alpha x}dx\quad(\alpha>0).$$

Γ 函数的性质：

1)$\Gamma(s)$在其定义域 $s>0$ 上连续,且有任意阶连续导数;

2)递推关系式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s),s>0.$

如果 n 是自然数,则

$$\Gamma(n+1)=n!;$$

3)勒让德(Legendre)加倍公式：$\Gamma(2s)=\frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(s)\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right),s>0;$

4)余元公式：$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin s\pi},\quad 0<s<1;$

5)与 B 函数之间的关系

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},\quad p>0,q>0.$$

(3)几个重要的积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},\qquad \int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos axdx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{1}{4}a^2},\qquad \int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|},$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin ax}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{2}e^{-|a|}\operatorname{sgn}a.$$

例 7.20 计算下列积分.

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}dx,|\alpha|<1$;

(3) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$;　　(4) $\int_0^{+\infty}e^{-x^4}dx\cdot\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}dx.$

解 (1)令 $t=\frac{x}{1+x}$,则 $x=\frac{t}{1-t},dx=\frac{1}{(1-t)^2}dt$,代入原积分可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx=\int_0^1t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}dt=B\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad (\text{余元公式}).$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan x)^{\alpha}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha}x\cos^{-\alpha}x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2\cdot\frac{1+\alpha}{2}-1}x \quad \cos^{2\cdot\frac{1-\alpha}{2}-1}x\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sin\frac{1+\alpha}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}.$$

(3)令 $\cos x = 1-2\sqrt{t}$,则 $x = \arccos(1-2\sqrt{t})$, $\mathrm{d}x = \frac{t^{-\frac{3}{4}}}{2\sqrt{1-\sqrt{t}}}\mathrm{d}t$, 代入原积分,有

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{t}}}\cdot\frac{t^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{1-\sqrt{t}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\pi}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right).$$

(4)令 $t = x^4$,则

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int_0^{+\infty}t^{-\frac{3}{4}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\cdot\int_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{16}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

例 7.21　计算下列积分.

(1) $\int_0^1\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{\alpha}^{\alpha+1}\ln\Gamma(x)\mathrm{d}x, \alpha>0$.

解　(1)令 $x = 1-t$,则 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$,代入原积分,有

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\,dx.$$

所以

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx &= \int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx + \int_0^1 \ln \Gamma(1-x)\,dx \\
&= \int_0^1 \ln \Gamma(x)\Gamma(1-x)\,dx \\
&= \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin x\pi}dx \quad (\text{余元公式}) \\
&= \int_0^1 \ln \pi dx - \int_0^1 \ln \sin x\pi dx \\
&= \ln \pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln \sin u\,du \quad (\text{令 } u = x\pi) \\
&= \ln \pi - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u\,du \\
&= \ln \pi - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right) \quad \left(\text{用了欧拉积分}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2\right) \\
&= \ln 2\pi,
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi.$$

$$\begin{aligned}
(2)\ \int_{\alpha}^{\alpha+1} \ln \Gamma(x)\,dx &= \int_{\alpha}^{0} \ln \Gamma(x)\,dx + \int_0^1 \ln \Gamma(x)\,dx + \int_1^{1+\alpha} \ln \Gamma(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\ln 2\pi + \int_1^{1+\alpha} \ln \Gamma(x)\,dx - \int_0^{\alpha} \ln \Gamma(x)\,dx.
\end{aligned}$$

对上式右端第一个积分作变换：$x = 1 + t$，则

$$\begin{aligned}
\int_1^{1+\alpha} \ln \Gamma(x)\,dx &= \int_0^{\alpha} \ln \Gamma(1+t)\,dt = \int_0^{\alpha} \ln(t\Gamma(t))\,dt \\
&= \int_0^{\alpha} \ln t dt + \int_0^{\alpha} \ln \Gamma(t)\,dt \\
&= \alpha\ln \alpha - \alpha + \int_0^{\alpha} \ln \Gamma(t)\,dt.
\end{aligned}$$

于是有

$$\int_{\alpha}^{\alpha+1} \ln \Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \alpha\ln \alpha - \alpha.$$

例 7.22 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx$（西北大学）.

解 这个题目可用含参变量积分的连续性定理解，这里我们用 Γ 函数来解.

令 $t = x^n$,则 $x = t^{\frac{1}{n}}, \mathrm{d}x = \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}t$, 代入原积分有

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \Gamma\left(\frac{1}{n}+1\right) \to \Gamma(1) = 1 \quad (n \to \infty),$$

这里应用了 $\Gamma(s)$ 在其定义域上的连续性.

例 7.23　已知 $0 \leqslant h \leqslant 1$,正整数 $n \geqslant 3$, 证明:

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h.$$

(中科大).

证明　令 $t^2 = xh^2$,则 $\mathrm{d}t = \frac{1}{2}hx^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$,

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}t = \frac{h}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-h^2x)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{h}{2}\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{n-3}{2}}\mathrm{d}x \quad (\text{因为 } 0 \leqslant h \leqslant 1, x^{-\frac{1}{2}} \geqslant 0)$$

$$= \frac{h}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\right).$$

例 7.24　设 $a > 0, b > 0, c > 0$, 试证:

$$\iiint_V x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{a+b+c} \cdot \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)},$$

其中 V 为四面体, $x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x+y+z = 1$ (郑州大学).

证明　写出累次积分:

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y} x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^1 x^{a-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{b-1}\left(\frac{1}{c}z^c\right)\Big|_0^{1-x-y}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{b-1}(1-x-y)^c\mathrm{d}y.$$

令 $y=(1-x)t$, 则

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}\mathrm{d}x\int_0^1 (1-x)^{b-1}t^{b-1}(1-x)^c(1-t)^c(1-x)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{c}\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b+c}\mathrm{d}x\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^c\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{c}\mathrm{B}(a,b+c+1)\cdot\mathrm{B}(b,c+1) \\ &= \frac{1}{c}\frac{\Gamma(a)\Gamma(b+c+1)}{\Gamma(a+b+c+1)}\cdot\frac{\Gamma(b)\Gamma(c+1)}{\Gamma(b+c+1)} \\ &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}{(a+b+c)\Gamma(a+b+c)}. \end{aligned}$$

二、重积分

重积分的定义及性质

(1)定义

二重积分的定义

$$I = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i,$$

其中 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, d_i 是 $\Delta\sigma_i$ 的直径, $(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i$ 称为介点$(i=1,2,\cdots,n)$.

几何意义:当 $z=f(x,y)\geqslant 0$, $(x,y)\in D$ 时,二重积分 I 表示以 $z=f(x,y)$ 为曲顶,以 D 为底面的曲顶柱体的体积.

$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = A$, A 为 D 的面积.

三重积分的定义

$$I = \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\mathrm{d}\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i,$$

其中 $d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{d_i\}$, d_i 是 ΔV_i 的直径, $(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\in\Delta V_i$ 称为介点$(i=1,2,\cdots,n)$.

物理意义:当 $u=f(x,y,z)\geqslant 0$, $(x,y,z)\in\Omega$ 时,三重积分 I 表示以 $u=f(x,y,z)$ 为体密度的空间物体 Ω 的质量.

$\iiint\limits_\Omega \mathrm{d}V = V$, V 为 Ω 的体积.

(2)重积分的性质

重积分的许多性质和定积分是一样,如线性性、区域的可加性、不等式性与绝对可积性、中值定理等. 对此我们不再一一列举,下面给出重积分的对称定理.

二重积分的对称定理　设 D 是平面上的有界闭区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积，则

1）若 $D = D_1 + D_2$，D_1 与 D_2 关于 y 轴对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(-x,y) = f(x,y) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} f(-x,y) = -f(x,y) \text{ 时}; \end{cases}$$

2）若 $D = D_1 + D_2$，D_1 与 D_2 关于 x 轴对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(x,-y) = f(x,y) \text{ 时}, \\ 0, & \text{当} f(x,-y) = -f(x,y) \text{ 时}; \end{cases}$$

3）若 $D = \sum_{i=1}^{4} D_i$ 是关于 x 轴、y 轴均对称的区域，那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 4\iint_{D_i} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 且关于 } y \text{ 为偶函数}, \\ 0, & \text{当} f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 或关于 } y \text{ 为奇函数}, \end{cases}$$

其中 D_i 是区域 D 位于第 $i(i = 1,2,3,4)$ 象限的区域；

4）若 $D = D_1 + D_2$，D_1 与 D_2 关于原点对称，那么

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma, & \text{当} f(x,y) \text{ 在 } D \text{ 上关于 } x,y \text{ 为偶函数}, \\ 0, & \text{当} f(x,y) \text{ 在 } D \text{ 上关于 } x,y \text{ 为奇函数}; \end{cases}$$

5）若 D 关于直线 $y = x$ 对称，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}\sigma.$$

三重积分的对称定理　设 Ω 是三维空间的有界闭区域，$f(x,y,z)$ 在 Ω 上可积，则

1）若 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$，$\Omega_1$ 与 Ω_2 关于 xOy 平面对称，那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, & \text{当} f \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数时}, \\ 0, & \text{当} f \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数时}; \end{cases}$$

2）若 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$，$\Omega_1$ 与 Ω_2 关于 z 轴对称，那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, & \text{当} f \text{ 关于 } x,y \text{ 为偶函数时}, \\ 0, & \text{当} f \text{ 关于 } x,y \text{ 为奇函数时}; \end{cases}$$

3）若 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$，$\Omega_1$ 与 Ω_2 关于原点对称，那么

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, & \text{当 } f \text{ 关于 } x,y,z \text{ 为偶函数时,} \\ 0, & \text{当 } f \text{ 关于 } x,y,z \text{ 为奇函数时;} \end{cases}$$

4)若 $\Omega = \sum_{i=1}^{8} \Omega_i$ 是关于三个坐标平面均对称的区域,那么

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \begin{cases} 8\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}V, & \text{当 } f \text{ 分别是 } x,y,z \text{ 的偶函数时,} \\ 0, & \text{当 } f \text{ 至少是 } x,y,z \text{ 中某一变量的奇函数时,} \end{cases}$$

其中 Ω_i 表示 Ω 在第 $i(i = 1,2,\cdots,8)$ 卦限的那部分区域.

需要指出的是,仅当积分区域的对称性和被积函数的奇偶性同时满足时,才能使用重积分的对称定理.

(3)二重积分的计算

计算二重积分的基本方法是:化成累次积分. 而化累次积分的方法是根据积分区域 D 的形状来确定的.

若 $D = [a,b] \times [c,d]$ 为矩形区域,则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x;$$

若 $D = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x)\}$ 为 X 型区域,则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \quad (\text{先 } y \text{ 后 } x);$$

若 $D = \{(x,y) \mid \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y), c \leqslant y \leqslant d\}$ 为 Y 型区域,则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad (\text{先 } x \text{ 后 } y).$$

两点说明:(a)积分区域 D 从整体来看,它可能既不是 X 型也不是 Y 型区域,但总可分为若干个 X 型或 Y 型区域. 利用积分区域的可加性先在每个小的 X 型或 Y 型区域上计算,然后相加即可.

(b)不同顺序的累次积分,计算的复杂程度差别非常大(可能某一顺序的累次积分无法积出!)因此选择合适的积分顺序是重要的.

另外,在计算重积分时,要注意使用对称定理和几何意义(主要指重心或形心)来提高运算的速度.

二重积分的变量替换定理 设变换

$$T: x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D'.$$

满足:1) T 建立了 D 与 D' 之间的一一对应;

2) x,y 在 D' 上具有一阶连续偏导数,其逆变换 $u = u(x,y), v = v(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数;

3）T 的 Jacobi 行列式 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 在 D' 上恒不为零，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

满足上述要求的变换 T 称为**正则变换**.

在二重积分的计算中，最常用的变换是极坐标变换或广义极坐标变换.

例 7.25　作极坐标变换，将二重积分

$$I = \iint_D f(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

化为定积分，其中 $D = \{(x,y)\,|\,0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1\}$.

解　如图 7-1 所示. 令 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$\begin{aligned} I &= \iint_D rf(r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}r\int_0^{\frac{\pi}{4}} rf(r)\,\mathrm{d}\theta + \int_1^{\sqrt{2}} \mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} rf(r)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 rf(r)\,\mathrm{d}r + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{1}{r}\right) rf(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}} rf(r)\,\mathrm{d}r - \int_1^{\sqrt{2}} r\arccos\frac{1}{r}\cdot f(r)\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

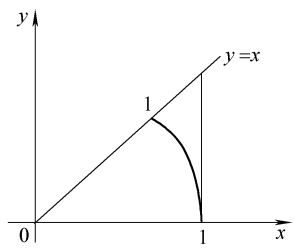


图 7-1　例 7.27 图

例 7.26　将下面的二重积分化为定积分：

$$I = \iint_D f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqslant 1\}, a^2+b^2 \neq 0$.

解　作正交变换 $x = \dfrac{bu+av}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \dfrac{bv-au}{\sqrt{a^2+b^2}}$，则 $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 1$，$xy$ 平面上的区域 D 变成了 uv 平面上的区域 D'：$u^2+v^2 \leqslant 1$. 于是有，

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'} f(\sqrt{a^2+b^2}v + c)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}v + c)\,\mathrm{d}v\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} \mathrm{d}u \\ &= 2\int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2}f(\sqrt{a^2+b^2}v + c)\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

例 7.27　设区域 D 是由 $y = x^3, y = 1$ 及 $x = -1$ 所围成，$f(u)$ 是连续函数. 计算 $I = \iint_D x[1 + yf(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解　如图 7-2 所示. 由于被积函数中出现了抽象函数，所以直接计算是行不通

的. 因此必须考虑用对称定理,为此需要对区域进行适当的分割.

用 $y=-x^3$ 将区域 D 分为 D_1 和 D_2 两部分,其中 D_1 关于 y 轴对称, D_2 关于 x 轴对称. 故

$$I=\iint_{D_2}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{x^3}^{-x^3}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}.$$

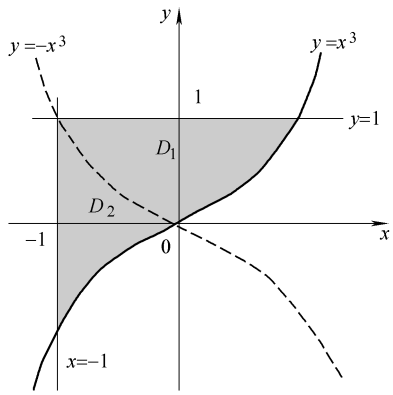


图 7-2 例 7.29 图

类题 1 求二重积分

$$\iint_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

的值,其中 D 是由直线 $y=x, y=-1$ 和 $x=1$ 所围成的区域(数学Ⅲ,Ⅳ).

类题 2 选择题:设 D 是 xy 平面上以(1,1),(−1,1)和(−1,−1)为顶点的三角形区域, D_1 是 D 在第一象限的部分,则 $\iint_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ (　　).

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(B) $2\iint_{D_1}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

(C) $2\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(D) 0.

例 7.28 计算积分

$$I=\iint_D(x^3y+y^3\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D: x^2+y^2\leqslant ax$.

解 因为积分区域 D 关于 x 轴对称,而 $x^3y, y^3\sqrt{x^2+y^2}$ 是关于 y 的奇函数,故

$$I=\iint_D(x^3y+y^3\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作极坐标变换: $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\cos\theta}r^3\cos\theta\mathrm{d}r=\frac{a^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)^2\mathrm{d}(\sin\theta)\\&=\frac{a^4}{2}\int_0^1(1-2u^2+u^4)\mathrm{d}u\qquad(\text{令 }u=\sin\theta)\\&=\frac{4}{15}a^4.\end{aligned}$$

例 7.29　计算由曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=xy$ 所围的区域 D 的面积($a>0,b>0$).

解　任一条直线 $y=kx(k>0)$ 与曲线有两个交点$(0,0)$与

$$(x(k),y(k))=\left(\frac{k}{\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right)^3},\frac{k^2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right)^3}\right).$$

由 $\lim\limits_{k\to0^+}x(k)=\lim\limits_{k\to+\infty}x(k)=0,\lim\limits_{k\to0^+}y(k)=\lim\limits_{k\to+\infty}y(k)=0$ 知,曲线所围的区域位于第一象限内. 作变换:

$$x=ar\cos^2\theta,y=br\sin^2\theta,$$

则

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr\sin 2\theta,$$

区域 D 变成区域 $D'=\left\{(r,\theta)\,|0\leqslant r\leqslant\frac{ab}{4}\sin^2 2\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$. 于是,区域 D 的面积

$$\begin{aligned}A&=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}abr\sin 2\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{ab}{4}\sin^2 2\theta}r\mathrm{d}r\\&=\frac{a^3b^3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\sin^4 2\theta\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{a^3b^3}{64}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2 2\theta+\cos^4 2\theta)\mathrm{d}(\cos 2\theta)\\&=\frac{a^3b^3}{60}.\end{aligned}$$

注 7.5　这个题目的计算,我们作了广义极坐标变换. 一般地,对形如 $(ax-c)^p+(by-d)^p$ 函数式子可通过变换:

$$x=\frac{1}{a}(c+r^{\frac{1}{p}}\cos^{\frac{2}{p}}\theta),y=\frac{1}{b}(d+r^{\frac{1}{p}}\sin^{\frac{2}{p}}\theta)$$

将它变为 r.

类题 1　求由曲线 $\sqrt[4]{\frac{x}{a}}+\sqrt[4]{\frac{y}{b}}=1$ 与直线 $x=0,y=0$ 所围的区域面积.

提示　作变换:$x=ar^4\cos^8\theta,y=br^4\sin^8\theta$.

类题 2　求积分

$$I=\iint_D\left(\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由曲线 $\sqrt{\frac{x-c}{a}}+\sqrt{\frac{y-c}{b}}=1$ 和直线 $x=c,y=c$ 所围成,而 $a,b,c>0$.

提示 作变换:$x=c+ar^2\cos^4\theta,y=c+br^2\sin^4\theta$.

例 7.30 计算

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}}\min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 因为

$$\min\left\{\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2},2(x^2+y^2)\right\}=\begin{cases}\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}, & \text{当}\frac{1}{8}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}\text{时},\\ 2(x^2+y^2), & \text{当}0\leqslant x^2+y^2<\frac{1}{8}\text{时},\end{cases}$$

所以

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2<\frac{1}{8}}2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\frac{1}{8}\leqslant x^2+y^2\leqslant\frac{3}{16}}\sqrt{\frac{3}{16}-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作极坐标变换:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则有

$$\begin{aligned}I&=2\iint\limits_{r<\frac{\sqrt{2}}{4}}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta+\iint\limits_{\frac{\sqrt{2}}{4}\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}}r\sqrt{\frac{3}{16}-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}}r^3\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{4}}r\sqrt{\frac{3}{16}-r^2}\mathrm{d}r\\&=\frac{5}{192}\pi.\end{aligned}$$

例 7.31 1) 计算积分 $A=\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 $D:0\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant1$ 上连续,且满足下列条件:$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\iint\limits_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$. 证明存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A},$$

这里 A 是 1) 中的积分值(北大).

1) 解 如图 7-3 所示.

$$\begin{aligned}A&=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\int_0^1\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4x}}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y+\end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{4}}^{1}\int_{\frac{1}{4x}}^{1}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2.$$

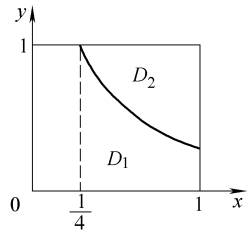


图 7-3　例 7.33 图

2) 证明　由 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, $\iint\limits_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$ 知,

$$\iint\limits_D\left(xy-\frac{1}{4}\right)f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1,$$

所以

$$\iint\limits_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|\cdot|f(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 1.$$

由积分中值定理知,存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使

$$|f(\xi,\eta)|\cdot\iint\limits_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 1,$$

故

$$|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}.$$

例 7.32　计算积分

$$I=\iint\limits_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant\pi}\ln|\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\text{中科院}).$$

解　由对称性,有

$$I=\frac{1}{2}\iint\limits_D\ln|\sin(x-y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y,D=[0,\pi]\times[0,\pi].$$

而

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\ln|\sin(y-x)|\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-x}^{\pi-x}\ln|\sin u|\mathrm{d}u\quad(\text{对内层积分作变换 }u=y-x)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi}\ln|\sin u|\mathrm{d}u\quad(\text{注意到 }\ln|\sin u|\text{是以 }\pi\text{ 为周期的函数})$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin u\mathrm{d}u=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\mathrm{d}u=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

例 7.33　计算二重积分

$$I=\iint\limits_D\frac{(x+y)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 表示由直线 $x+y=1$ 及两坐标轴所围成的三角形区域(复旦).

解 作变换：$u = x + y, v = \dfrac{y}{x}$，则 $|J| = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{u}{(1+v)^2}$，而积分区域 D 变成了 uv 平面上的区域 $\Omega = \{(u,v) \mid 0 \leqslant u \leqslant 1, 0 \leqslant v < +\infty\}$. 于是，有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} \frac{u\ln(1+v)}{\sqrt{1-u}} \cdot \frac{u}{(1+v)^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1-u}} \mathrm{d}u \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2} \mathrm{d}v \\ &= \frac{16}{15}. \end{aligned}$$

类题 求曲线 C：$|\ln x| + |\ln y| = 1$ 所围的平面图形面积 A.

提示 曲线 C 所围的平面区域 D 位于第一象限.

当 $x \geqslant 1, y \geqslant 1$ 时，C 的方程为：$\ln x + \ln y = 1$，即 $xy = \mathrm{e}$；

当 $x \geqslant 1, 0 < y < 1$ 时，C 的方程为：$\ln x - \ln y = 1$，即 $\dfrac{x}{y} = \mathrm{e}$；

当 $0 < x < 1, y \geqslant 1$ 时，C 的方程为：$-\ln x + \ln y = 1$，即 $\dfrac{y}{x} = \mathrm{e}$；

当 $0 < x < 1, 0 < y < 1$ 时，C 的方程为：$-\ln x - \ln y = 1$，即 $xy = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

这四条曲线构成了区域 D 的边界，于是有

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变换：$u = xy, v = \dfrac{y}{x}$，则变换的 Jacobi 式为 $\dfrac{\partial(x,u)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{2v}$，区域 D 变成了 uv 平面的区域 $D_{uv} = \left\{(u,v) \;\middle|\; \dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant u \leqslant \mathrm{e}, \dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant v \leqslant \mathrm{e}\right\}$. 所以

$$A = \iint_{D_{uv}} \frac{1}{2v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \mathrm{d}u \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{2v} \mathrm{d}v = \mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 7.34 给定积分 $I = \iint_D \left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，作正则变换 $x = x(u,v), y = y(u,v)$，区域 D 变为 Ω，如果变换满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u},$$

证明：

$$I = \iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

（北师大）.

证明 利用复合函数的微分法，有

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial f}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

通过计算易知

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

注意到

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1,$$

可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right]\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

例 7.35　设 f 是 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上的二次连续可微函数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=x^2+y^2$. 计算积分

$$I=\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(复旦).

解　作极坐标变换：$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,$$

所以

$$I=\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial r}\cdot r\mathrm{d}\theta.$$

利用格林公式，有

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f}{\partial r}\cdot r\mathrm{d}\theta=\int_{x^2+y^2=r^2}\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}s&=\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{\pi}{2}r^4.\end{aligned}$$

于是

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{\pi}{10}.$$

类题 1 设 $f(x,y)$ 在 $x^2+y^2\leqslant 1$ 二次连续可微,且满足

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

试计算积分

$$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

类题 2 设函数 $z=f(x,y)$ 满足方程 $F(x+az,y+bz)=0$,其中 F 为可微函数,a,b 为常数,求 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\left(a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$(华南理工).

提示 在方程 $F(x+az,y+bz)=0$ 两边分别关于 x,y 求偏导,可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1}{aF_1+bF_2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2}{aF_1+bF_2},$$

进而有 $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=-1$. 于是,$I=-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 7.36 计算积分

$$I=\int_1^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y+\int_2^4\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}y.$$

(数学Ⅱ).

解 积分区域 D 是由 $y=\sqrt{x}$,$y=x$ 及 $y=2$ 所围成(如图 7-4 所示).

交换累次积分的顺序,有

$$\begin{aligned}I&=\int_1^2\mathrm{d}y\int_y^{y^2}\sin\frac{\pi x}{2y}\mathrm{d}x\\&=-\int_1^2\frac{2y}{\pi}\cos\frac{\pi y}{2}\mathrm{d}y\\&=\frac{4}{\pi^3}(2+\pi).\end{aligned}$$

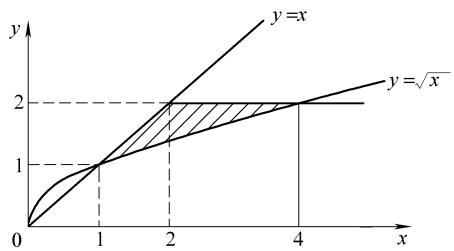


图 7-4 例 7.38 图

注 7.6 计算累次积分的一般步骤:根据积分的上、下限得到表示积分区域 D 的不等式组,并由此画出积分区域的草图. 然后根据积分区域的类型选择合适的积分顺序.

(4)三重积分的计算.

计算三重积分的基本方法是:化为累次积分(先一后二或先二后一). 在化累次积分时要注意选择适当的坐标系(直角坐标、柱坐标、球坐标)和合适的积分顺序.

在计算三重积分时类似于二重积分的变量替换定理也成立,在此不再赘述. 常用的变量变换有

柱坐标变换

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z, |J| = r,$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad -\infty < z < +\infty.$$

由此可见,柱坐标变换就是 z 不变,而将 x,y 用极坐标变换. 因此,将三重积分先对 z 积分化成二重积分(先一后二)后,再用极坐标变换其结果是一样的.

当然,相应于柱坐标变换也有广义柱坐标变换.

球坐标变换

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad x = r\cos\varphi, \quad |J| = r^2\sin\varphi,$$

$$0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,$$

其中 r 是球半径, θ 是转动角, φ 是仰角(即与 z 轴正向的夹角).

另外,相应于球坐标变换也有广义球坐标变换.

(5)重积分的应用.

几何上的应用

1)求平面区域 D 的面积,即 $A = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$;

2)求空间区域 Ω 的体积,即 $V = \iiint\limits_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$;

3)求曲面的面积.

设二元函数 $z = f(x,y)$ 及其一阶偏导数都连续,它所对应的曲面 S 与平行于 z 轴的直线只交于一点, D_{xy} 为该曲面在 xOy 平面上的投影,则曲面 S 的面积为

$$A = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

在物理上的应用

1)求质量

薄片的质量 $M = \iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $\rho(x,y) \geqslant 0$ 是薄片的面密度.

空间立体的质量 $M = \iiint\limits_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $\rho(x,y,z) \geqslant 0$ 是空间立体的体密度;

2)求重心.

薄片的重心 $(\bar{x},\bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}, \quad \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

空间立体的重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_D x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},\quad \bar{y}=\frac{\iiint\limits_D y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z},$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_D z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_D \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z};$$

3)求转动惯量

薄片关于 x 轴,y 轴及原点的转动惯量分别为:

$$J_x=\iint\limits_D y^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad J_y=\iint\limits_D x^2\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$J_o=\iint\limits_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

空间立体关于 x,y,z 轴及原点的转动惯量分别为:

$$J_x=\iiint\limits_\Omega (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\quad J_y=\iiint\limits_\Omega (x^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_z=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

$$J_o=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

例 7.37 计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega (x+z)\,\mathrm{d}V$,其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围的区域(数学Ⅰ).

解 由于积分区域 Ω 关于 yOz 平面对称,所以 $\iiint\limits_\Omega x\mathrm{d}V=0$. 对积分 $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V$ 采用"先二后一"的方法,则有

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi z^3\mathrm{d}z+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\pi z(1-z^2)\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

本例亦可用球坐标变换和柱坐标变换来求解.

类题 1 计算三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz(R>0)$ 的公共部分.

提示 用"先二后一"法.

当 $z \in [0,\frac{R}{2}]$ 时,用 $z=z$ 的平面去截 Ω,截口是圆域 $D_1(z):x^2+y^2 \leqslant 2Rz-z^2$;

当 $z \in [\frac{R}{2},R]$ 时,用 $z=z$ 的平面去截 Ω,截口也是圆域 $D_2(z):x^2+y^2 \leqslant R^2-z^2$. 于是,有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{R}{2}} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_1(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2 \mathrm{d}z \iint\limits_{D_2(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\int_0^{\frac{R}{2}} z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z + \pi\int_{\frac{R}{2}}^{R} z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z \\ &= \frac{59}{480}\pi R^5 \end{aligned}$$

类题 2　计算三重积分:$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 $\Omega:x^2+y^2+(z-1)^2 \leqslant 1$.

提示　用“先二后一”法. $I=\frac{320}{63}\pi$.

例 7.38　设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为 cm,时间单位为 h). 已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为 0.9),问高度为 130cm 的雪堆全部融化需多长时间?(数学Ⅱ).

解　设 $V(t)$ 为雪堆的体积,$S(t)$ 为雪堆的侧面积,则

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^{h(t)} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{h(t)} \frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\pi h^3(t); \\ S(t) &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}h^2(t)} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}h^2(t)} \sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h^2(t)}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} \sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}\,r\mathrm{d}r = \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}(h^2(t)+16r^2)^{\frac{1}{2}}r\mathrm{d}r \\ &= \frac{13}{12}\pi h^2(t). \end{aligned}$$

由题意知，$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S$，即 $\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{13}{10}$，解之可得

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + C.$$

由初始条件 $h(0) = 130$，可得 $h(t) = -\frac{13}{10}t + 130$. 令 $h(t) \to 0$ 可得 $t = 100\ (h)$.

故雪堆全部融化所需的时间为 $100h$.

例 7.39 设有一半径为 R 的球体，P_0 是此球的表面上的一定点，球体上任一点的密度与该点到 P_0 的距离的平方成正比（比例常数 $k > 0$），求球体的重心位置（数学Ⅰ）.

解法 1 记所考虑的球体为 Ω，以 Ω 的球心为坐标原点 O，射线 OP_0 为 x 轴的正向建立坐标系，则 P_0 点的坐标为 $(R,0,0)$，球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

密度函数为

$$\rho(x,y,z) = k[(x-R)^2 + y^2 + z^2].$$

设重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性可知，$\bar{y} = 0, \bar{z} = 0$，

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} kx[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}.$$

而

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V &= \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V - 2R\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V + R^2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V \\
&= \iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V + R^2\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}V \quad \left(\text{由对称性，}\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V = 0\right) \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2 \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r + \frac{4}{3}\pi R^5 \\
&= \frac{32}{15}\pi R^5 \quad (\text{作球坐标变换}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} x[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V &= \iiint\limits_{\Omega} x(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V - 2R\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V + R^2\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}V \\
&= -2R\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V \\
&= -\frac{2}{3}R\iiint\limits_{\Omega}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V = -\frac{8}{15}\pi R^6
\end{aligned}$$

故

$$\bar{x} = -\frac{R}{4}.$$

因此球体 Ω 的重心位置为 $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

解法 2　选取 P_0 为坐标系的原点,球心坐标为 $(0,0,R)$,则球面方程为

$$x^2 + y^2 + (z-R)^2 = R^2.$$

而此时密度函数为

$$\rho(x,y,z) = k(x^2+y^2+z^2).$$

设重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$,由对称性知,$\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$,

$$\bar{z} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V}.$$

而

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} z(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi} r^5\sin\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{8}{3}\pi R^6,$$

故

$$\bar{z} = \frac{5R}{4}.$$

因此球体 Ω 的重心坐标为 $\left(0,0,\frac{5R}{4}\right)$.

注 7.7　求重心问题,虽然有固定的方法,但是坐标系的选择是至关重要的,合适的坐标系可使问题大大简化. 在解法 1 中,我们多次使用了对称性的结论.

类题　计算三重积分 $I = \iiint\limits_{\Omega}\left[\mathrm{e}^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \tan(x+y+z)\right]\mathrm{d}V$,其中 $\Omega = \{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$.

提示　断言:$\iiint\limits_{\Omega}\tan(x+y+z)\,\mathrm{d}V = 0.$

易见 Ω 关于平面 $\Pi: x+y+z=0$ 对称,只要能证明 $\tan(x+y+z)$ 在关于 Π 的对称点处的值相反即可.

设 $(x_0,y_0,z_0) \in \Omega$,其关于 Π 的对称点设为 (x_1,y_1,z_1),则点 (x_1,y_1,z_1) 必在直线 $L:\begin{cases} x = x_0 + t, \\ y = y_0 + t, \\ z = z_0 + t \end{cases}$ 上,将其代入 Π 的方程可得:$t = -\frac{1}{3}(x_0+y_0+z_0)$,所以 L 与

Π 的交点为 $\left(\frac{2}{3}x_0-\frac{1}{3}y_0-\frac{1}{3}z_0,-\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{1}{3}z_0,-\frac{1}{3}x_0-\frac{1}{3}y_0+\frac{2}{3}z_0\right)$.

由

$$\begin{cases}\frac{x_0+x_1}{2}=\frac{2}{3}x_0-\frac{1}{3}y_0-\frac{1}{3}z_0,\\ \frac{y_0+y_1}{2}=-\frac{1}{3}x_0+\frac{2}{3}y_0-\frac{1}{3}z_0,\\ \frac{z_0+z_1}{2}=-\frac{1}{3}x_0-\frac{1}{3}y_0+\frac{2}{3}z_0,\end{cases}$$

可得

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}x_0-\frac{2}{3}y_0-\frac{2}{3}z_0,\\ y_1=-\frac{2}{3}x_0+\frac{1}{3}y_0-\frac{2}{3}z_0,\\ z_1=-\frac{2}{3}x_0-\frac{2}{3}y_0+\frac{1}{3}z_0,\end{cases}$$

所以 $\tan(x_1+y_1+z_1)=\tan(-x_0-y_0-z_0)=-\tan(x_0+y_0+z_0)$,即 $\tan(x+y+z)$ 在关于 Π 对称的点处的值相反.

于是,有 $I=\iiint\limits_{\Omega}e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}dV$,用球坐标变换易得:$I=\frac{4\pi}{3}(e-1)$.

例 7.40 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2+z^2\leqslant 1\\ x^2+y^2-z^2\geqslant\frac{1}{2}}}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

(中科院,1983).

解 用柱坐标变换. 不难看出,积分区域 Ω 变成

$$\Omega'=\left\{(r,\theta,z)\ \middle|\ \frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant r\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2},0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,-\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}\leqslant z\leqslant\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}\right\}\cup$$
$$\left\{(r,\theta,z)\ \middle|\ \frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,-\sqrt{1-r^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{1-r^2}\right\},$$

于是有

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}}^{\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}}z\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}z\mathrm{d}z$$
$$=0+0=0.$$

事实上,由于积分区域 Ω 关于 xOy 平面对称,而被积函数关于 z 为奇函数,所

以由对称性可知 $I = 0$.

例 7.41　求由 $(x^2 + y^2)^2 + z^4 = y$ 所围的立体的体积(南开).

解　显然立体关于 xOy 平面、yOz 平面对称. 在上半空间 $y \geqslant 0$ 上,用 Ω 表示位于第一卦限部分的区域,则

$$V = 4\iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

作广义球坐标变换:

$$\begin{cases} x = \sqrt{r\sin\varphi}\cos\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ y = \sqrt{r\sin\varphi}\sin\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ z = \sqrt{r\cos\varphi}, & 0 \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{\sin\varphi\sin^2\theta} \end{cases}$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right| = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{r}{\cos\varphi}},$$

故

$$\begin{aligned} V &= 4 \cdot \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}} \int_0^{\sqrt[3]{\sin\varphi\sin^2\theta}} \sqrt{r}\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \quad (\text{见例 7.20(2)}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\pi \quad (\text{余元公式}). \end{aligned}$$

例 7.42　设 a,b,c 为不全为零的实数,$f(t)$ 是连续函数.

$$I = \iiint_{\Omega} f(ax + by + cz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$.

(1) 将 I 化为单重积分;

(2) 当 $f(t) = \cos t$ 时,计算 I 的值(第(2)问,南开).

(3) 记第(2)问的结果为 $I(k)$,证明:$I(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无穷多个零点.

解　(1) 记 $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,把单位向量 $\left(\dfrac{a}{k},\dfrac{b}{k},\dfrac{c}{k}\right)$ 扩充为一个正交矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{k} & \dfrac{b}{k} & \dfrac{c}{k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

作变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 仍然是正交阵,故 $|J| = |\det \boldsymbol{A}^{-1}| = 1$,且该变换将区域 Ω 变成区域 Ω':$u^2 + v^2 + w^2 \leqslant 1$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega'} f(ku)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u \iint_{v^2+w^2\leqslant 1-u^2} f(ku)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)f(ku)\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

例题 7.26 是这个问题的二维情形.

(2)当 $f(t) = \cos t$ 时,有

$$I = \pi\int_{-1}^{1}(1-u^2)\cos ku\mathrm{d}u = \frac{4\pi}{k^2}\left(\frac{\sin k}{k} - \cos k\right).$$

(3) 记 $g(k) = \sin k - k\cos k$,只需证明:$g(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无穷多个零点即可. 令 $g'(k) = k\sin k = 0$,可得 $g(k)$ 的驻点:$k = n\pi, n \in \mathbf{N}$. 易见

$$g''(k) = \sin k + k\cos k = \begin{cases} k > 0, & k = 2m\pi, \\ -k < 0, & k = (2m+1)\pi, \end{cases} \quad m \in \mathbf{N}.$$

由此可见,$g(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无穷多个极大值和无穷多个极小值.

而极大值 $g((2m+1)\pi) = k > 0$,极小值 $g(2m\pi) = -k < 0$. 由于 $g(k)$ 是连续函数,所以它在 $(0, +\infty)$ 内必与 x 轴有无穷多个交点,即 $g(k)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无穷多个零点.

例 7.43 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 是正定矩阵,证明椭球体

$$\Omega: \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j \leqslant 1$$

的体积等于 $\frac{4\pi}{3}(\det \boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}$,即

$$\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{4\pi}{3}(\det \boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}.$$

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 正定,所以存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$,使得

$$\boldsymbol{T}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, 3)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征根. 记

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right),$$

作变换

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{T\Lambda}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{T\Lambda Y},$$

则变换的雅可比(Jacobi)行列式为

$$J=\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}=\det(\boldsymbol{T\Lambda})=(\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^{-\frac{1}{2}}=(\det\boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}.$$

注意到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X'AX}&=(\boldsymbol{T\Lambda Y})'\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T\Lambda Y})=\boldsymbol{Y'\Lambda'T'AT\Lambda Y}\\&=\boldsymbol{Y'\Lambda'}(\boldsymbol{T'AT})\boldsymbol{\Lambda Y}=\boldsymbol{Y'Y},\end{aligned}$$

有

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3&=\iiint_{\boldsymbol{X'AX}\leqslant 1}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\\&=\iiint_{Y'Y\leqslant 1}(\det\boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\\&=\frac{4\pi}{3}(\det\boldsymbol{A})^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

例 7.44　计算下面的三重积分.

(1) $I=\iiint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-h)^2}}\ (h>R)$;

(2) $J=\iiint_{\Omega}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}\ (a^2+b^2+c^2>R^2)$,

其中 Ω:$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.

解　(1)作柱坐标变换:$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$,则

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}\\&=\pi\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}}\frac{\mathrm{d}r^2}{\sqrt{r^2+(z-h)^2}}\\&=2\pi\int_{-R}^{R}\left[\sqrt{R^2+h^2-2hz}-(h-z)\right]\mathrm{d}z\\&=2\pi\left[-\frac{1}{3h}(R^2+h^2-2hz)^{\frac{3}{2}}+\frac{(h-z)^2}{2}\right]\Bigg|_{-R}^{R}\\&=\frac{4\pi R^3}{3h}\end{aligned}$$

(2)作新坐标系 $O\xi\eta\zeta$,使 ζ 轴过点 (a,b,c),且使坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 到坐标系 $Oxyz$ 之间的变换为正交变换(从坐标系 $O\xi\eta\zeta$→坐标系 $Oxyz$ 可通过旋转变换来实现,因

此从坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 到坐标系 $Oxyz$ 之间的正交变换是存在的!),变换的行列式为 1. 显然该变换将半径为 R 的球仍变为半径为 R 的球. 记 $a^2+b^2+c^2=h^2$,则由(1)知

$$J=\iiint\limits_{\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2}\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2+(\zeta-h)^2}}$$

$$=\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

类题 设 $\sum$ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$,A 是 $\sum$ 内部一点,它与原点的距离为 q $(0<q<1)$,ρ 为点 A 与 $\sum$ 上的点之间的距离,求 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\rho^2}$(华中科大).

提示 设 A 点的坐标是 (a,b,c),由题设条件,$q=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 且 $0<q<1$,而

$$\rho^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2,\text{其中}(x,y,z)\in\Sigma.$$

作坐标系的正交变换,使得 A 点位于新坐标系 $O\xi\eta\zeta$ 的 ζ 轴上,这样可以将积分 I 化成下面的形式 $I=\iint\limits_{\sum}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+(z-q)^2}$.

令 $x=\cos\theta\sin\varphi,y=\sin\theta\sin\varphi,z=\cos\varphi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$,通过计算可得 $\mathrm{d}S=\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. 于是

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{1-2q\cos\varphi+q^2}=\frac{\pi}{q}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(1-2q\cos\varphi+q^2)}{1-2q\cos\varphi+q^2}$$

$$=\frac{\pi}{q}\ln(1-2q\cos\varphi+q^2)\Big|_0^{\pi}=\frac{2\pi}{q}\ln\frac{1+q}{1-q}.$$

(6)广义重积分.

广义重积分在近年来各类学校的考题中出现的不多,尤其是证明题,但计算题中也曾出现过一些. 广义重积分的计算大都也是通过化成累次积分甚至单积分来实现的,下面我们将通过例题来说明这一点.

比较判别法 设 D 是无界区域,∂D 是由有限段光滑或逐段光滑曲线所组成. 函数 f,g 在 D 上有定义,对 D 的任一可求面积的有界子区域 D_r,f,g 均在 D_r 上有界可积. 如果 g 非负,且

$$|f(x,y)|\leqslant g(x,y),\quad\forall(x,y)\in D,$$

则当 g 在 D 上(广义)可积时,f 也在 D 上(广义)可积;

如果

$$|f(x,y)|\geqslant g(x,y),\quad\forall(x,y)\in D,$$

则当 g 在 D 上的广义积分发散时,f 在 D 上的广义积分也发散.

记 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,取 $g(x,y)=\frac{C}{r^p}$(C 为常数),由上述比较判别法可得如下的

柯西判别法 对 D,f 的要求同上,则

(1)如果对充分大的 r, 有

$$|f(x,y)| \leqslant \frac{C}{r^p}, p > 2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛;

(2)如果 D 内含有一个顶点在原点的无限扇形:$D' = \{(r,\theta) \mid r \geqslant r_0, \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta\}$, 且在 D' 上,

$$|f(x,y)| \geqslant \frac{C}{r^p}, p \leqslant 2,$$

则广义积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 发散.

与一元函数在无限区间上的广义积分不同,广义重积分的收敛性与绝对收敛性等价.

对于无界函数在有界区域上的广义重积分可类似地讨论,在此不再赘述.

例 7.45　计算 $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解
$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_{y>x} \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{y\leqslant x} \min\{x,y\}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint\limits_{y>x} x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{y\leqslant x} y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y} x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{x} y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y \\ &= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t \quad (\text{令}\sqrt{2}x = t) \\ &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

例 7.46　讨论广义重积分

$$I = \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}$$

的敛散性,其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x + y \geqslant 1\}$. 当积分收敛时,求积分的值.

解　因为被积函数恒正,故可取 $D_r = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 1 \leqslant x + y \leqslant r\}$,显然当 $r \to +\infty$ 时,D_r 趋于 D. 记

$$I_r = \iint\limits_{D_r} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x+y)^p}.$$

作变换:$x = u, x + y = v$,则

$$I_r = \int_0^1 \mathrm{d}u \int_1^r \frac{\mathrm{d}v}{v^p} = \frac{1}{1-p}(r^{1-p}-1),$$

显然当 $p > 1$ 时,积分收敛,且积分值为 $\frac{1}{p-1}$.

例 7.47 讨论广义积分

$$I = \iint\limits_{|x|+|y|\geqslant 1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x|^p + |y|^q} \quad (p>0, q>0)$$

的敛散性.

解 由对称性,有

$$I = 4 \iint\limits_{\substack{x+y\geqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}.$$

显然, I 与下面的积分 I' 具有相同的敛散性,

$$I' = \iint\limits_{\substack{x^p+y^q\geqslant 1\\ x\geqslant 0, y\geqslant 0}} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}.$$

记 $D_r = \{(x,y) \mid 1 \leqslant x^p + y^q \leqslant r^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$,显然当 $r \to +\infty$ 时, D_r 趋于区域 $D = \{(x,y) \mid x + y \geqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

下面考察 $I'_r = \iint\limits_{D_r} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p + y^q}$.

令 $x = (\rho\cos\theta)^{\frac{2}{p}}, y = (\rho\sin\theta)^{\frac{2}{q}}$,则 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 1 \leqslant \rho \leqslant r$,

$$|J| = \frac{4}{pq}\rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-1}\sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta.$$

于是

$$\begin{aligned} I'_r &= \frac{4}{pq}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1}\theta\cos^{\frac{2}{p}-1}\theta\,\mathrm{d}\theta \int_1^r \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{2}{pq}\mathrm{B}\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\int_1^r \rho^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3}\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{pq\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)}\mathrm{B}\left(\frac{1}{p},\frac{1}{q}\right)\left[r^{2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)}-1\right], \end{aligned}$$

由此可见,当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ 时积分收敛.

例 7.48 计算广义三重积分

$$I = \iiint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1-\cos x\cos y\cos z},$$

其中 D 为 $0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi$.

解　作变换：$u=\tan\frac{x}{2},v=\tan\frac{y}{2},w=\tan\frac{z}{2}$，则$0<u,v,w<+\infty$，

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \cos y=\frac{1-v^2}{1+v^2},\quad \cos z=\frac{1-w^2}{1+w^2},$$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|=\frac{8}{(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)},$$

所以

$$I=\iiint\limits_{D'}\frac{8}{(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)-(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中D'为$u>0,v>0,w>0$.

再作球坐标变换：$u=r\sin\varphi\cos\theta,v=r\sin\varphi\sin\theta,w=r\cos\varphi$，则$0<\theta,\varphi<\frac{\pi}{2},0<r<+\infty$，且$|J|=r^2\sin\varphi$.

而

$$\begin{aligned}&(1+u^2)(1+v^2)(1+w^2)-(1-u^2)(1-v^2)(1-w^2)\\=&2(u^2+v^2+w^2)+2u^2v^2w^2\\=&2r^2+2r^6\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^4\varphi\cos^2\varphi,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}I&=4\iiint\limits_{D''}\frac{\sin\varphi}{1+r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^4\varphi\cos^2\varphi}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{1+\lambda r^4},\end{aligned}$$

其中$\lambda=\cos^2\theta\sin^2\theta\sin^4\varphi\cos^2\varphi$. 由上式可见，积分是存在的，下面我们来计算它.

作变换：$\lambda r^4=s$，则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}r}{1+\lambda r^4}&=\frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}}\int_0^{+\infty}s^{-\frac{3}{4}}(1+s)^{-1}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}}\int_0^1t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t\quad\left(\text{令}\,t=\frac{s}{s+1}\right)\\&=\frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4\lambda^{\frac{1}{4}}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}\\&=\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{4}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2.$$

三、曲线积分

1. 第一型曲线积分(也称对弧长的曲线积分)

第一型曲线积分是定积分的自然推广,因此它具有定积分的性质,包括含有不等式的性质及积分中值性. 另外,它还有自身特有的性质——与积分路径方向无关,即

$$\int_{L(AB)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s = \int_{L(BA)} f(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s.$$

(1)计算方法

第一型曲线积分计算的基本方法是:化成定积分. 需要注意的是化成的定积分下限必须小于上限.

若 $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha,\beta]$,则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

对空间曲线上的积分有类似的公式.

(2)第一型曲线积分的应用

1)求弧长.

曲线 L 的弧长 $l = \int_L \mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$

2)求曲线的质量. 设曲线 L 的线密度 $\rho(x,y)$,则曲线 L 的质量

$$m = \int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

3)求曲线 L 的重心坐标. 设曲线 L 的重心坐标为 $(\bar{x},\bar{y})$,则

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_L x\rho(x,y)\,\mathrm{d}s, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\int_L y\rho(x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $m = \int_L \rho(x,y)\,\mathrm{d}x$ 为曲线 L 的质量.

2. 第二型曲线积分(也称对坐标的曲线积分)

第二型曲线积分的背景是质点受力作用沿曲线运动所做的功的计算,因此这类曲线积分与方向(即起、终点)有关. 这样凡是用不等式表示的性质对第二型曲线积分均不再成立,由此可推出积分的中值性也不再成立. 但定积分的其他性质如线性性、可加性等对第二型曲线积分仍然成立.

(1)计算方法

第二型曲线积分计算的基本方法是:化为定积分. 积分的下限对应曲线 L 的起点,上限对应曲线 L 的终点.

若 $L:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t=\alpha$ 对应曲线 L 的起点 A,$t=\beta$ 对应曲线 L 的终点 B,则

$$\int_{L(AB)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}\{P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)\}\mathrm{d}t.$$

对空间曲线 L 也有类似的公式.

计算第二型曲线积分常用的方法:

1)利用曲线的参数方程化成定积分求解;

2)对平面曲线积分用格林公式化成二重积分求解;

3)对空间曲线积分用斯托克斯公式化成第一型曲面积分求解;

4)当积分与路径无关而只与起、终点有关时,用求原函数的方法求解.

另外利用对称性可以简化运算.

对称性定理　设 L 为分段光滑的平面曲线.

1)若 $L=L_1\cup L_2$,L_1 与 L_2 关于 x 轴对称,且走向相反,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{当 } P(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数},\\ 2\int_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x, & \text{当 } P(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数};\end{cases}$$

2)若 $L=L_1\cup L_2$,L_1 与 L_2 关于 y 轴对称,且走向相反,则

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & \text{当 } Q(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数},\\ 2\int_{L_1}Q(x,y)\mathrm{d}y, & \text{当 } Q(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数}.\end{cases}$$

(2)第二型曲线积分的应用

1)求变力做功

设质点在变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 作用之下沿着曲线 L 从 A 点运动到 B 点,则变力所做的功为

$$W=\int_{L(AB)}\boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

2)求平面图形的面积

设 L 是逐段光滑的简单闭曲线,则它所围的面积 S 用曲线积分表示为:

$$S=\oint_L x\mathrm{d}y=-\oint_L y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x,$$

其中曲线 L 的正向为逆时针方向.

3. 两类曲线积分的关系

坐标微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$,其中 $\boldsymbol{\tau}$ 为曲线沿指定方向的单位切向量,则

$$\int_L\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\tau})\mathrm{d}s.$$

对平面曲线 L,设 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为它的切方向余弦,则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)\mathrm{d}s = \int_L (P\cos\alpha + Q\sin\alpha)\mathrm{d}s.$$

若用 $\boldsymbol{n}$ 表示曲线 L 的外法向,用 $(x,\boldsymbol{n})$ 表示 x 轴正向与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角,则

$$\cos\alpha = -\sin(x,\boldsymbol{n}),\quad \sin\alpha = \cos(x,\boldsymbol{n}).$$

于是又有

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L [-P\sin(x,\boldsymbol{n}) + Q\cos(x,\boldsymbol{n})]\mathrm{d}s.$$

对空间曲线 L,设 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是切方向余弦,则

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s.$$

例 7.49 计算 $I = \oint_L (z + y^2)\mathrm{d}s$,其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

解法 1 (用参数方程求解). 将 $z = -x - y$ 代入球面方程整理可得

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2 + \left(\frac{x}{2} + y\right)^2 = \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

令 $\frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{R}{\sqrt{2}}\cos\theta$,代入上式得:$\frac{x}{2} + y = \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta$,所以

$$x = \frac{2}{\sqrt{6}}R\cos\theta,\quad y = -\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta + \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta,$$

$$z = -x - y = -\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)}\mathrm{d}\theta = R\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$I = \int_0^{2\pi} R\left(-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos\theta - \frac{R}{\sqrt{2}}\sin\theta + \frac{R^2}{6}\cos^2\theta - \frac{R^2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta + \frac{R^2}{2}\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3.$$

解法 2 (用对称性求解). 由于积分变量 x,y,z 在曲线方程中具有轮换对称性(即三个变量轮换位置,曲线方程不变),所以

$$\oint_L z\mathrm{d}s = \oint_L y\mathrm{d}s = \oint_L x\mathrm{d}s,$$

$$\oint_L y^2\mathrm{d}s = \oint_L z^2\mathrm{d}s = \oint_L x^2\mathrm{d}s.$$

故

$$I = \frac{1}{3}\oint_L (x + y + z + x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L R^2\,\mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

类题 1　计算 $\oint_L xy\,\mathrm{d}s$,其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

提示　可直接利用参数方程求解,但利用对称性更为简单. 由

$$\oint_L xy\,\mathrm{d}s = \oint_L yz\,\mathrm{d}s = \oint_L zx\,\mathrm{d}s$$

可得

$$\begin{aligned}\oint_L xy\,\mathrm{d}s &= \frac{1}{3}\oint_L (xy + yz + zx)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{1}{6}\oint_L ((x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2))\,\mathrm{d}s\\ &= -\frac{1}{6}R^2\oint_L \mathrm{d}s = -\frac{1}{3}\pi R^3.\end{aligned}$$

类题 2　计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|}$,其中 L 是椭圆周 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$,方向为逆时针方向.

提示　曲线 L 位于 x 轴上、下方的部分分别记为 L_1、L_2,显然 L_1 与 L_2 关于 x 轴对称,且走向相反. 由于 $p(x,y) = \frac{1}{|x| + |y|}$ 关于 y 是偶函数,所以 $\oint_L \frac{\mathrm{d}x}{|x| + |y|} = 0$.

同理, $\oint_L \frac{\mathrm{d}y}{|x| + |y|} = 0$. 从而 $I = 0$.

例 7.50　求八分之一球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0$ 的边界曲线的重心. 设曲线的线密度 $\rho = 1$ (数学Ⅱ).

解　设边界曲线 L 在 xOy, yOz, zOx 平面内的弧段分别为 L_1, L_2, L_3,则曲线的重量为

$$m = \oint_L 1 \cdot \mathrm{d}s = 3 \cdot \frac{2\pi R}{4} = \frac{3}{2}\pi R.$$

设曲线 L 的重心坐标为 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,则

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{m}\left(\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s + \int_{L_2} x\,\mathrm{d}s + \int_{L_3} x\,\mathrm{d}s\right)\\ &= \frac{2}{m}\int_{L_1} x\,\mathrm{d}s = \frac{2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4R}{3\pi}.\end{aligned}$$

由对称性知, $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{4R}{3\pi}$, 故所求的重心为 $\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

例 7.51　计算 $I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{3x^2 + 4y^2}$,其中 L 是椭圆 $2x^2 + 3y^2 = 1$, 方向沿逆时针方向.

解 $P(x,y)=-\dfrac{y}{3x^2+4y^2}, Q(x,y)=\dfrac{x}{3x^2+4y^2}$，在任何不包含原点的区域内均有 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{3x^2-4y^2}{(3x^2+4y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，因此对任何完全落在 L 内部且包含原点的封闭曲线 C，在 L 和 C 所夹的区域内应用格林公式，有

$$\oint_{L+C^-} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

其中 C^- 表示在曲线 C 上方向沿顺时针方向.

由此可得

$$I=\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

选取 $\varepsilon>0$ 适当小，使 $C:3x^2+4y^2=\varepsilon^2$ 完全落在 L 内，则有

$$\begin{aligned} I&=\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{3x^3+4y^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{\varepsilon^2}\iint\limits_{3x^2+4y^2\leqslant\varepsilon^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

注 7.8 本例的解法是利用积分与路径的无关性来处理内部含有奇点的第二型曲线积分常用的方法. 另外，需要提醒大家的是，要注意题设的条件. 例如，当 $f(u)$ 连续时，证明

$$\oint_L f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)=0,$$

（其中 L 是一光滑封闭曲线）就不能使用 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 此时只能使用积分与路径无关的另一个条件，即 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分.

类题 证明：

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\begin{cases}0, & \xi<0,\\ 2\pi, & \xi>0,\end{cases}$$

其中 L 是以 $(\xi,1),(\xi,-1),(-1,-1),(-1,1)$ 为顶点的矩形边界，积分沿 L 的正向.

例 7.52 计算曲线积分 $I=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，其中

$$P=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\sin y-y\cos y), Q=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\cos y+y\sin y),$$

L 是绕原点的简单闭曲线.

解法 1 当 $x^2+y^2\neq 0$，可以验证 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，所以可将曲线 L 换成以原点为中心，适当小的 $\varepsilon>0$ 为半径的小圆周：

$$L':x=\varepsilon\cos\theta,y=\varepsilon\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

易见

$$J=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L'}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi.$$

构造辅助函数.

$$A=P+\frac{y}{x^2+y^2},\qquad B=Q-\frac{x}{x^2+y^2},$$

仍有 $\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial B}{\partial x}$. 若定义 $A(0,0)=0,B(0,0)=1$,则 A,B 在原点连续.

事实上,由泰勒展开式,有

$$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2),\quad \cos y=1-\frac{y^2}{2}+o(y^2),\quad \sin y=y+o(y^2),$$

所以有

$$\begin{aligned}A&=\frac{\mathrm{e}^x}{x^2+y^2}(x\sin y-y\cos y)+\frac{y}{x^2+y^2}\\&=\frac{1}{x^2+y^2}\left\{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\left[x(y+o(y^2))-y\left(1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)+y\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}y(1+x)+\frac{o(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\to 0\quad(\text{当}(x,y)\to(0,0)\text{时}),\end{aligned}$$

即补充定义后 A 在原点连续. 同理可证 B 也在原点连续. 于是

$$I=J=2\pi$$

解法 2　在 L' 上,有

$$\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\mathrm{d}\theta,\quad \frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=0,$$

故

$$\begin{aligned}I&=\oint_{L'}\mathrm{e}^x\cos y\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}+\oint_{L'}\mathrm{e}^x\sin y\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\varepsilon\cos\theta}\cos(\varepsilon\sin\theta)\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

积分值与 ε 无关. 注意到被积函数关于 ε,θ 连续,令 $\varepsilon\to 0^+$,在积分号下取极限可得

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi.$$

例 7.53　设 $I_{R,\sigma}=\oint_{x^2+xy+y^2=R^2}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^\sigma}$,求 $\lim\limits_{R\to+\infty}I_{R,\sigma}$(浙大).

解　记椭圆周 $x^2+xy+y^2=R^2$ 为 L,取 $\varepsilon>0$ 充分小,使小圆 $\Gamma:x^2+y^2=\varepsilon^2$ 完全落在 L 内. 并记 L 与 Γ 所夹的区域为 D,由格林公式,则有

$$\begin{aligned} I_{R,\sigma} &= \left(I_{R,\sigma} - \int_{\Gamma} + \int_{\Gamma}\right)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\sigma}} \\ &= \iint_D \left[\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{\sigma}}\right)'_x - \left(\frac{-y}{(x^2+y^2)^{\sigma}}\right)'_y\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\sigma}} \\ &= \iint_D \frac{2(1-\sigma)}{(x^2+y^2)^{\sigma}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\Gamma}\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+y^2)^{\sigma}} \\ &\xlongequal{\Delta} J_1 + J_2, \end{aligned}$$

对 J_1 作极坐标变换：$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta$，则

$$\begin{aligned} J_1 &= 2(1-\sigma)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\varepsilon}^{R/\sqrt{1+\sin\theta\cos\theta}}\frac{\rho}{\rho^{2\sigma}}\mathrm{d}\rho \\ &= R^{2-2\sigma}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta\cos\theta)^{\sigma-1}\mathrm{d}\theta - 2\pi\varepsilon^{2-2\sigma}; \end{aligned}$$

对 J_2 利用参数方程：$x = \varepsilon\cos\theta, y = \varepsilon\sin\theta$，则

$$J_2 = 2\pi\varepsilon^{2-2\sigma}.$$

于是

$$I_{R,\sigma} = R^{2(1-\sigma)}\int_0^{2\pi}(1+\sin\theta\cos\theta)^{\sigma-1}\mathrm{d}\theta.$$

注意到

$$1+\sin\theta\cos\theta = 1+\frac{1}{2}\sin 2\theta > 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

所以

$$\lim_{R\to+\infty} I_{R,\sigma} = \begin{cases} 2\pi, & \sigma = 1, \\ 0, & \sigma > 1, \\ +\infty, & \sigma < 1. \end{cases}$$

例 7.54 计算曲线积分 $I = \oint_L (z-y)\mathrm{d}x + (x-z)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2 = 1, \\ x-y+z = 2 \end{cases}$，从 z 轴的正向往负向看去 L 的方向是顺时针方向(数学Ⅰ).

解法 1 （用参数方程求解） 令 $x = \cos t, y = \sin t$，则

$$z = 2 - \cos t + \sin t.$$

故

$$\begin{aligned} I = \int_{2\pi}^{0} &[-(2-\cos t)\sin t + (2\cos t - \sin t - 2)\cos t + \\ &(\cos t - \sin t)(\sin t + \cos t)]\mathrm{d}t \\ = -\int_{2\pi}^{0} &[2(\sin t + \cos t) - 2\cos 2t - 1]\mathrm{d}t = -2\pi. \end{aligned}$$

解法 2　（用斯托克斯公式求解）　设 S 为平面 $x-y+z=2$ 上以 L 为边界的有限部分，其法向量与 z 轴正向的夹角为钝角. D_{xy} 为 S 在 xy 平面的投影域，即 D_{xy}：$x^2+y^2\leqslant 1$. 记 $\boldsymbol{F}=\{z-y,x-z,x-y\}$，则

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{F}=\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}=2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由斯托克斯公式可得

$$I=\oint_L \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_S 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi,$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\}$.

注 7.9　在使用斯托克斯公式将空间曲线积分化成第二类曲面积分（当然也可化成第一类曲面积分，关于这些在下一段我们详细讲解）时，要注意 L 的方向和曲面 S 的法向量符合右手法则.

例 7.55　设封闭曲线 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$ 的正向与 z 轴正向符合右手法则，求曲线积分 $I=\oint_L|y-x|\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z$.

解　由 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ x^2+y^2+z^2=2z\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x^2+y^2=\dfrac{3}{4},\\ z=\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 因此可设曲线 L 的参数方程为：

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos t,y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t,z=\dfrac{1}{2}$，$t$ 从 $-\dfrac{5\pi}{4}$ 到 $\dfrac{3\pi}{4}$.

于是

$$\begin{aligned} I&=\oint_L|y-x|\mathrm{d}x+z\mathrm{d}z\\ &=\int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t\right|\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t\quad(\text{因为 }\mathrm{d}z=0)\\ &=-\frac{3}{4}\int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}\left|\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right|\sin t\mathrm{d}t\\ &\xlongequal{\text{令 }u=t+\frac{\pi}{4}}-\frac{3\sqrt{2}}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos u|\sin\left(u-\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}u\\ &=-\frac{3}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos u|(\sin u-\cos u)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\pi} |\cos u|\cos u \mathrm{d}u$$

$$\xlongequal{令 v=u-\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin v|\ \sin v \mathrm{d}v = 0.$$

注 7.10 (1)由于被积函数中出现了 $|y-x|$,所以本例不能使用斯托克斯公式;

(2)参数 t 的取值从 $-\frac{5\pi}{4}$ 到 $\frac{3\pi}{4}$ 是为了让后面定积分的积分区间化成对称区间. 当然也可以取 t 的值为 $-\pi$ 到 π 或 0 到 2π 等.

例 7.56 计算曲线积分 $I=\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$, 其中 L 是从点 $(a,0,0)$ 沿着以下曲线到点 $(0,0,c)$ 的路径: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1(a>0,b>0,c>0$ 为常数), $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ (复旦).

解法 1 (用参数方程求解). 从 $\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1$ 中解出 $z=c\left(1-\frac{x}{a}\right)$ 代入椭球面方程,整理可得:

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

令

$$x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta, \quad y=\frac{b}{\sqrt{2}}\sin\theta,$$

则

$$z=\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\cos\theta.$$

由于 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$, 并注意到椭圆心在 $\left(\frac{a}{2},0,0\right)$ 处,所以 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$,故

$$I=\int_0^{\pi}\Big[-\frac{b}{\sqrt{2}}\sin\theta\frac{a}{2}\sin\theta+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\cos\theta\right)\frac{b}{\sqrt{2}}\cos\theta+$$

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos\theta\right)\frac{c}{2}\sin\theta\Big]\mathrm{d}\theta$$

$$=-\frac{ab}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta-\frac{bc}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta+\frac{ac}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{ac}{2}-\frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a+c).$$

解法 2 (选取 z 作为参数). 曲线 L 的参数方程为:

$$x = a\left(1 - \frac{z}{c}\right), \quad y = b\sqrt{\frac{2}{c}z - \frac{2}{c^2}z^2}, \quad z = z, \quad z \text{ 从 } 0 \text{ 到 } c.$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^c \left[-\frac{ab}{c}\sqrt{\frac{2}{c}z - \frac{2}{c^2}z^2} + bz\frac{\left(\frac{1}{c} - \frac{2}{c^2}z\right)}{\sqrt{\frac{2}{c}z - \frac{2}{c^2}z^2}} + a\left(1 - \frac{z}{c}\right)\right]\mathrm{d}z \\ &= \frac{b(c-a)}{c}\int_0^c \sqrt{\frac{2}{c}z - \frac{2}{c^2}z^2}\,\mathrm{d}z - \frac{b}{c}\int_0^c \frac{z}{\sqrt{\frac{2}{c}z - \frac{2}{c^2}z^2}}\mathrm{d}z + a\int_0^c \left(1 - \frac{z}{c}\right)\mathrm{d}z \\ &= \frac{b(c-a)}{4\sqrt{2}}\pi - \frac{bc}{2\sqrt{2}}\pi + \frac{ac}{2} \\ &= \frac{ac}{2} - \frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a+c). \end{aligned}$$

解法 3　(用斯托克斯公式求解). 由于空间曲线 L 不是闭曲线,所以补充直线段 L_1, 使得 $L + L_1$ 为闭曲线,其中 L_1 是从点 $(0,0,c)$ 沿直线 $\begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 到点 $(a,0,0)$ 的直线段. 由斯托克斯公式,有

$$\begin{aligned} I &= \left(\oint_{L+L_1} - \int_{L_1}\right) y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z \\ &= -\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{L_1} y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

其中 S 是由 $L + L_1$ 所围的有限部分.

注意到 S 在 xOy 平面、yOz 平面以及 zOx 平面的投影分别为:

$$D_{xy}: \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} \leqslant 1, \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0,$$

$$D_{yz}: \frac{\left(z - \frac{c}{2}\right)^2}{\left(\frac{c}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2} \leqslant 1, \quad y \geqslant 0, z \geqslant 0$$

及

$$D_{zx}: \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, y = 0, x \geqslant 0, z \geqslant 0.$$

所以

$$I = -\iint\limits_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{yz}} \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \int_c^0 a\left(1 - \frac{z}{c}\right)\mathrm{d}z$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\pi - \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{b}{\sqrt{2}}\pi + \frac{ac}{2}$$

$$= \frac{ac}{2} - \frac{\pi b}{4\sqrt{2}}(a + c).$$

例 7.57 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有一阶连续导数，L 是上半平面 $y > 0$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I = \int_L \frac{1}{y}[1 + y^2 f(xy)]\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y.$$

(1)证明：曲线积分 I 与积分路径无关；

(2)当 $ab = cd$ 时，求 I 的值.

(数学Ⅱ).

证明 (1)因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}(1 + y^2 f(xy))\right] = -\frac{1}{y^2} + f(xy) + xyf'(xy),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{y^2}(y^2 f(xy) - 1)\right] = f(xy) + xyf'(xy) - \frac{1}{y^2},$$

所以在上半平面内曲线积分 I 与积分路径无关.

解 (2)由(1)知，$\frac{1}{y}[1 + y^2 f(xy)]\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y$ 是某个函数 $u(x,y)$ 的全微分，而

$$\frac{1}{y}[1 + y^2 f(xy)]\mathrm{d}x + \frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{y}\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y + f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) + f(xy)\mathrm{d}(xy).$$

设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $u(x,y) = \frac{x}{y} + F(xy) + C$，因此

$$I = u(c,d) - u(a,b) = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}.$$

类题 1 设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数，且 $\varphi(0) = 0$，计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\varphi(x)\mathrm{d}y$ (数学Ⅰ).

类题 2　设函数 $Q(x,y)$ 在 xy 平面上具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与积分路径无关,并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$ (数学Ⅰ,Ⅱ).

提示　由已知条件:$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$,即 $Q(x,y) = x^2 + c(y)$,$c(y)$ 为待定函数. 又

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 (t^2 + c(y))\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 c(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t (1 + c(y))\mathrm{d}y = t + \int_0^t c(y)\mathrm{d}y.$$

让两者相等,并两边关于 t 求导可得 $c(t) = 2t - 1$,故 $Q(x,y) = x^2 + 2y - 1$.

或由

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u(x,y) &= 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 2xy\mathrm{d}x + [x^2 + c(y)]\mathrm{d}y\\ &= \mathrm{d}(x^2y) + \mathrm{d}(\Phi(y)),\end{aligned}$$

可得

$$u(x,y) = x^2y + \Phi(y),$$

其中 $\Phi(y)$ 是 $c(y)$ 的一个原函数.

又由

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = [x^2y + \Phi(y)]\Big|_{(0,0)}^{(t,1)} = t^2 + \Phi(1) - \Phi(0),$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = [x^2y + \Phi(y)]\Big|_{(0,0)}^{(1,t)} = t + \Phi(t) - \Phi(0)$$

可知,

$$\Phi(t) = t^2 - t + \Phi(1).$$

两边关于 t 求导可得

$$c(t) = 2t - 1.$$

例 7.58　质点 P 沿着以 AB 为直径的圆周,从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\boldsymbol{F}$ 作用,如图 7-5 所示. $\boldsymbol{F}$ 的大小等于质点 P 到原点 O 之间的距离,其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正方向的夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$,求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功(数学Ⅰ).

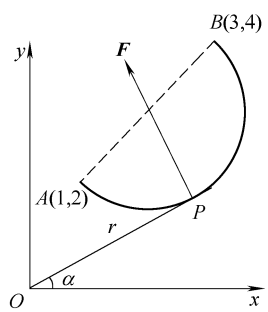


图 7-5　例 7.58 图

解　设 P 点的坐标为 (x,y). 由题设,

$|\boldsymbol{F}| = OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

设 $\boldsymbol{r}_0 = (\cos\alpha, \sin\alpha)$，则 $\boldsymbol{r}_0$ 可表示为 $\boldsymbol{r}_0 = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right)$.

由题设，$\boldsymbol{F}_0 = \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right)$（$\boldsymbol{F}_0$ 是 $\boldsymbol{F}$ 方向的单位向量），故 $\boldsymbol{F} = |\boldsymbol{F}|\boldsymbol{F}_0 = r\left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right) = (-y, x)$. 于是变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功为

$$W = \int_{\overset{\frown}{AB}} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y.$$

由于 $\overset{\frown}{AB}$ 的方程为 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 2$，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程可表示为：

$$x = 2 + \sqrt{2}\cos t, y = 3 + \sqrt{2}\sin t, \quad t \text{ 从 } -\frac{3\pi}{4} \text{ 到} \frac{\pi}{4}.$$

从而

$$\begin{aligned} W &= \int_{\overset{\frown}{AB}} -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}(3 + \sqrt{2}\sin t)\sin t + \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}\cos t)\cos t]\mathrm{d}t \\ &= 2(\pi - 1). \end{aligned}$$

类题 设质点受力作用，力的反方向指向原点，大小与质点离原点的距离成正比. 若质点从点 $(a,0)$ 沿椭圆移动到点 $(0,b)$，$a, b > 0$. 求力所做的功（北京航空航天大学）.

提示 由题意，$\boldsymbol{F} = (kx, ky)$，则

$$W = \int_L k(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y),$$

其中 L 是从点 $(a,0)$ 到点 $(0,b)$ 的椭圆段.

例 7.59 计算积分

$$I = \oint_L [x\cos(\boldsymbol{n}, x) + y\cos(\boldsymbol{n}, y)]\mathrm{d}s,$$

其中 $(\boldsymbol{n}, x), (\boldsymbol{n}, y)$ 分别是由 x 轴、y 轴正向与 L 的外法向 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角，L 为逐段光滑的简单闭曲线.

解 L^+ 表示 L 的正向，即沿逆时针方向，切线方向 $\boldsymbol{\tau}$ 与 L^+ 一致，如图 7-6 所示. 从 $\boldsymbol{n}$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 即到 $\boldsymbol{\tau}$，于是有

$$(\boldsymbol{n}, x) = (\boldsymbol{\tau}, y), (\boldsymbol{n}, y) = \pi - (\boldsymbol{\tau}, x),$$

故

$$\cos(\boldsymbol{n}, x)\mathrm{d}s = \cos(\boldsymbol{\tau}, y)\mathrm{d}s = \mathrm{d}y,$$

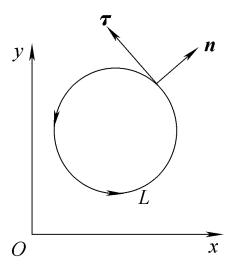


图 7-6 例 7.59 图

$$\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}s = -\cos(\boldsymbol{\tau},x)\mathrm{d}s = -\mathrm{d}x.$$

从而

$$I = \oint_L [x\cos(\boldsymbol{n},x) + y\cos(\boldsymbol{n},y)]\mathrm{d}s$$

$$= \oint_{L^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 2S,$$

其中 S 表示 L 所围的面积.

类题　计算高斯积分

$$I = \oint_{\partial D} \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s,$$

其中 ∂D 表示单连通区域 D 的边界，r 为 ∂D 上一点 $P(x,y)$ 到 ∂D 外一点 $A(\xi,\eta)$ 的距离，$(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})$ 为 $\boldsymbol{r}$（即向量 $\overrightarrow{AP}$）与外法向 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.

提示　因为 $\overrightarrow{AP} = (x-\xi,y-\eta)$，$\boldsymbol{n} = (\cos(\boldsymbol{n},x),\cos(\boldsymbol{n},y))$，所以

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \frac{x-\xi}{r}\cos(\boldsymbol{n},x) + \frac{y-\eta}{r}\cos(\boldsymbol{n},y).$$

于是

$$I = \oint_{\partial D} \left[\frac{x-\xi}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},x) + \frac{y-\eta}{r^2}\cos(\boldsymbol{n},y)\right]\mathrm{d}s$$

$$= \oint_{\partial D} \frac{x-\xi}{r^2}\mathrm{d}y - \frac{y-\eta}{r^2}\mathrm{d}x \quad (\text{利用上例的结论}).$$

当 A 在 D 外部时，由格林公式可得 $I = 0$.

当 A 在 D 内部时，取含于 D 内的以 A 点为圆心的小圆 C，则

$$I = \oint_C \frac{x-\xi}{r^2}\mathrm{d}y - \frac{y-\eta}{r^2}\mathrm{d}x = 2\pi.$$

例 7.60　已知平面区域 $D = \{(x,y)\mid 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界. 试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x \geqslant 2\pi^2$.

（数学Ⅰ）.

证法 1　(1) 由于

$$\text{左边} = \int_0^{\pi} \pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x,$$

$$\text{右边} = \int_0^{\pi} \pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y - \int_{\pi}^{0} \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\pi}(\mathrm{e}^{\sin x} + \mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x,$$

所以欲证的等式成立.

(2)由(1),利用平均值不等式得

$$\oint_L xe^{\sin y}dy - ye^{-\sin x}dx = \pi\int_0^{\pi}(e^{\sin x} + e^{-\sin x})dx \geqslant 2\pi^2.$$

证法 2 (1)由格林公式,有

$$\text{左边} = \iint_D (e^{\sin y} + e^{-\sin x})dxdy, \quad \text{右边} = \iint_D (e^{-\sin y} + e^{\sin x})dxdy.$$

因为 D 关于直线 $y = x$ 对称,所以左边 = 右边.

(2)由(1)得

$$\oint_L xe^{\sin y} - ye^{-\sin x}dx = \frac{1}{2}\iint_D (e^{-\sin x} + e^{\sin y} + e^{-\sin y} + e^{\sin x})dxdy$$

$$\geqslant 2\iint_D dxdy = 2\pi^2$$

四、曲面积分

1. 第一型曲面积分(也称对面积的曲面积分)

第一型曲面积分的背景是计算曲面薄片 Σ 的质量. 若 $\rho(x,y,z) \geqslant 0$ 是曲面 Σ 的密度,则 $M = \iint_{\Sigma}\rho(x,y,z)dS$ 是曲面的质量. 它具有重积分的性质,如,线性性、可加性等,而且它与积分曲面的侧无关.

(1)计算方法

基本的计算方法是化成二重积分

若 Σ 的方程由单值函数 $z = z(x,y)$ 给出,Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy},则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy.$$

若 Σ 的方程由单值函数 $y = y(x,z)$ 或 $x = x(y,z)$ 给出,可相应地写出其计算公式.

对称性定理 设分片光滑的曲面 Σ 关于 yOz 平面对称,则

$$\iint_{\Sigma}(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \\ 0, & \text{若 } f(x,y,z) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数,} \end{cases}$$

其中 $\Sigma_1: x = x(y,z) \geqslant 0$.

类似地可给出关于其他两个平面的对称性定理.

(2)第一型曲面积分的应用.

1)求有界曲面的面积:$A = \iint_{\Sigma} dS$.

2)求曲面薄片的质量：$M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$,$\rho$ 为曲面薄片的密度.

3)求曲面 Σ 的重心坐标：

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,\quad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

其中 $M=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$.

2. 第二型曲面积分(也称对坐标的曲面积分).

第二型曲面积分的背景是计算流速场 $\boldsymbol{V}=(P,Q,R)$ 在单位时间内向着指定侧的流量(通量),即

$$\Phi=\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因此它与积分曲面的侧有关.

(1)计算方法

基本的计算方法是化成二重积分.

1)参数法

若曲面 Σ 由单值函数 $z=z(x,y)$ 给出,Σ 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy},则

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

正负号的取法是:曲面的法向量与 z 轴正向夹角为锐角时取正号,为钝角时取负号.

若曲面 Σ 方程是由单值函数 $y=y(x,z)$ 或 $x=x(y,z)$ 给出,其计算公式可类似地给出,符号取法的规则如上.

若曲面 Σ 是由参数方程给出：

$$\Sigma:x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in D,$$

且行列式

$$A=\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\quad B=\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\quad C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不同时为零,则

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D}(PA+QB+RC)\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中正负号的取法是:若向量 (A,B,C) 与 Σ 的法向量(预先指定的)一致时,取正号,否则取负号.

2)用高斯公式化成三重积分.

3)用斯托克斯公式化为第二型曲线积分.

这种方法并不常用,原因是从第二型曲面积分到第二型曲线积分时,第二型曲线积分的被积函数不易求出.

对称性定理 设分片光滑的曲面 Σ 关于 xOy 平面对称,且侧相反,则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{当 } R(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为奇函数,} \\ 0, & \text{当 } R(x,y,z) \text{ 关于 } z \text{ 为偶函数,} \end{cases}$$

其中 $\Sigma_1: z = z(x,y) \geqslant 0$.

类似地可给出关于其他两个平面的对称性定理.

(2)第二型曲面积分的应用

1)求空间封闭曲面 Σ 所围的立体的体积:

$$V = \frac{1}{3}\oiint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2)求通量(流量)

流速场 $\boldsymbol{V} = (P,Q,R)$ 在单位时间内向着曲面 Σ 指定侧的流量:

$$\Phi = \iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 两类曲面积分之间的关系

设 Σ 是可定向曲面,$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 上选定的某一侧的法向量,则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

这个公式的主要用处在于简化曲面积分的计算. 当计算某一类曲面积分特别复杂时,可利用这个公式将其转化为另一类曲面积分计算.

4. 高斯公式

若空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成,P,Q,R 在 Ω 上具有一阶连续偏导数,且 Σ 取外侧,则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

或

$$\iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为 Σ 的外法向 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

5. 斯托克斯公式

斯托克斯公式是将空间曲面上的第二型曲面积分与该曲面边界上的第二型曲线积分之间建立联系的重要公式.

设 Σ 是空间分片光滑曲面，Σ 的边界 L 由分段光滑曲线组成. 又设 P,Q,R 在 $\overline{\Sigma}$ 上具有一阶连续偏导数，则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix},$$

其中 L 的方向与 Σ 的方向符合右手法则.

或

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是 Σ 的法向量的方向余弦.

若 Σ 是 xy 平面上的区域，则上两式就变成了格林公式.

由斯托克斯公式很容易推出 $\mathbf{R}^3$ 中的**曲线积分与路径无关的条件**：设 Σ 是 $\mathbf{R}^3$ 中的曲面单连通区域，$u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$，其中 P,Q,R 在 Σ 内有连续偏导数，则下列结论等价：

(1)对 Σ 内任一闭曲线 C，有 $\oint_C u = 0$；

(2)对 Σ 内任一路径 C，$\int_C u$ 仅与 C 的起点、终点有关，而与所走的路径无关；

(3)在 Σ 内成立

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

(4)存在函数 $W(x,y,z)$，使得在 Σ 内成立

$$\mathrm{d}W = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

且

$$W(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y,z)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,s,z)\mathrm{d}s + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,r)\mathrm{d}r + C,$$

$$\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = W\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)} = W(x,y,z) - W(x_0,y_0,z_0).$$

例 7.61　选择题：设 $S:x^2+y^2+z^2 = a^2(z\geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有(　　)(数学Ⅱ).

(A) $\iint_S x\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$；　　(B) $\iint_S y\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$；

(C) $\iint_S z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} x\mathrm{d}S$；　　(D) $\iint_S xyz\mathrm{d}S = 4\iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S$.

解 因为曲面 S 关于 yOz、zOx 平面对称,所以由对称性定理有

$$\iint_S x\mathrm{d}S = \iint_S y\mathrm{d}S = \iint_S xyz\mathrm{d}S = 0.$$

而

$$\iint_{S_1} x\mathrm{d}S > 0, \qquad \iint_{S_1} xyz\mathrm{d}S > 0.$$

故应选(C).

例 7.62 设 S 是椭圆面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分,点 $P(x,y,z)\in S$,Π 为 S 在点 P 的切平面,$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离,求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$ (数学Ⅱ).

解 设 (X,Y,Z) 为 Π 上任意一点,则 Π 的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1.$$

由此易知

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

由 S 的方程 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$ 有,

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{4}(4-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy}:$x^2+y^2\leqslant 2$ 是 S 在 xOy 平面上的投影.

作极坐标变换容易求出:

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi.$$

例 7.63 计算曲面积分 $I=\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$,其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{当}0\leqslant z\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\text{时},\\ 0, & \text{当}z<0\text{或}z>\sqrt{x^2+y^2}\text{时},\end{cases}$$

S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解　将球面 S 分成三部分 S_1,S_2,S_3, 其中

$$S_1: x^2+y^2+z^2=1,\quad 0\leqslant z\leqslant \sqrt{x^2+y^2},$$
$$S_2: x^2+y^2+z^2=1,\quad z<0,$$
$$S_3: x^2+y^2+z^2=1,\quad z>\sqrt{x^2+y^2}.$$

此时

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y,z)\in S_1\text{ 时},\\ 0, & \text{当}(x,y,z)\in S_2\cup S_3\text{ 时}.\end{cases}$$

曲面 S_1 在 xOy 平面的投影区域为 $D_{xy}:\dfrac{1}{2}\leqslant x^2+y^2\leqslant 1$, S_1 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, 故有

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

从而

$$\begin{aligned}I&=\iint\limits_{S_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r\mathrm{d}\left(-\sqrt{1-r^2}\right)\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

类题　计算积分

$$F(t)=\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中　　$S: x^2+y^2+z^2=t^2$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & z\geqslant\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & z<\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

答案: $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{6}\pi t^4$.

例 7.64　计算积分

$$F(t)=\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

其中　　$S: x+y+z=t$,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1-x^2-y^2-z^2, & x^2+y^2+z^2\leqslant 1,\\ 0, & x^2+y^2+z^2>1.\end{cases}$$

分析 首先必须搞清楚：t 取何值时，$f\neq 0$；t 又取何值时，$f=0$. 也就是说，t 取何值时平面 S 与球有交；t 取何值时平面 S 与球无交.

解 将 $z=t-x-y$ 代入 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$ 整理可得：

$$\left(x+\frac{y-t}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(y-\frac{t}{3}\right)^2\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{3}\right). \tag{1}$$

由此可知，当 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时，平面 S 在球 $x^2+y^2+z^2=1$ 内；当 $|t|>\sqrt{3}$ 时，平面 S 在球 $x^2+y^2+z^2=1$ 之外，所以

$$F(t)=\begin{cases}\displaystyle\iint_{x+y+z=t}(1-x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}S, & |t|\leqslant\sqrt{3},\\ \displaystyle\iint_{x+y+z=t}0\,\mathrm{d}S, & |t|>\sqrt{3}.\end{cases} \tag{2}$$

显然当 $|t|>\sqrt{3}$ 时，$F(t)=0$，所以只需计算 $|t|\leqslant\sqrt{3}$ 时的积分：

$$\iint_{x+y+z=t}(1-x^2-y^2-z^2)\,\mathrm{d}S=\iint_D[1-x^2-y^2-(t-x-y)^2]\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{3}$$

其中 D 是式(1)所表示的区域. 作变换

$$u=x+\frac{y-t}{2},\quad v=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(y-\frac{t}{3}\right),$$

则 D 变为 D'：$u^2+v^2\leqslant\rho^2$，其中 $\rho=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{t^2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. 于是

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

对式(3)右边进一步计算得

$$\begin{aligned}4\iint_{u^2+v^2\leqslant\rho^2}(\rho^2-u^2-v^2)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v&=4\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\rho}(\rho^2-r^2)\,r\mathrm{d}r\\&=2\pi\rho^4=\frac{\pi(3-t^2)^2}{18}\end{aligned}$$

所以

$$F(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{18}(3-t^2)^2, & |t|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |t|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

例 7.65 计算积分 $I=\displaystyle\iint_S|z|\,\mathrm{d}S$，其中 S 为柱体 $x^2+y^2\leqslant ax$ 被球体 x^2+y^2+

$z^2 \leqslant a^2$ 截取部分的表面积.

解　用 S_1 表示 S 在第一卦限部分,用 S_{11} 和 S_{12} 分别表示 S_1 的柱面和球面部分. 由对称性,有

$$I = 4\iint_{S_1} z\mathrm{d}S = 4\iint_{S_{11}} z\mathrm{d}S + 4\iint_{S_{12}} z\mathrm{d}S$$

$$\overset{\Delta}{=\!=} I_1 + I_2.$$

球面与柱面的交线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

从中消去 y,可得 S_{11} 在 xOz 平面上的投影区域 D_{xz}:$0 \leqslant z \leqslant \sqrt{a^2 - ax}$,$0 \leqslant x \leqslant a$. 由 S_{11} 的方程 $y = \sqrt{ax - x^2}$ 可得

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + y_x^2 + y_z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

故

$$I_1 = 4\iint_{D_{xz}} z\frac{a}{2\sqrt{ax - x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z = 2a\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax - x^2}}\int_0^{\sqrt{ax - x^2}} z\mathrm{d}z$$

$$= a\int_0^a \frac{ax - x^2}{\sqrt{ax - x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}a^3.$$

S_{12} 在 xOy 平面上的投影区域 D_{xy}:$x^2 + y^2 \leqslant ax, y \geqslant 0$.

由 S_{12} 方程为 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 可得

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

故

$$I_2 = 4\iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_{D_{xy}} a\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4a \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}a^3,$$

从而

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\pi}{2}a^3 + \frac{\pi}{2}a^3 = \pi a^3.$$

类题　计算积分 $I = \iint_S |xyz|\mathrm{d}S$, 其中

(1) S 为 $|x| + |y| + |z| = 1$;

(2) S 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被 $z = 1$ 割下的部分.

答案:(1) $\frac{13}{3}\sqrt{3}$; (2) $\frac{125\sqrt{5}-1}{420}$.

例 7.66 设曲面 S 由方程 $(x^2+y^2+z^2)^2 = x^2 - y^2$ 所确定,求曲面 S 的面积.

解 在球坐标变换:$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi$ 之下,曲面 S 的方程是 $r^2 = \sin^2\varphi\cos 2\theta$,其参数方程为

$$x = r\sin\varphi\cos\theta = \sin^2\varphi\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta = \sin^2\varphi\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta,$$
$$z = r\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\cos 2\theta}.$$

通过计算易知,

$$E = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = \cos 2\theta,$$
$$F = x_\varphi x_\theta + y_\varphi y_\theta + z_\varphi z_\theta = -\sin\varphi\cos\varphi\sin 2\theta,$$
$$G = x_\theta^2 + y_\theta^2 + z_\theta^2 = \frac{\sin^2\varphi}{\cos 2\theta}(\sin^2 2\theta + \sin^2\varphi\cos^2 2\theta).$$

由此得

$$EG - F^2 = \sin^4\varphi.$$

由曲面的对称性,只需求第一卦限部分的面积即可. 而此时 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$,并且由曲面方程知 $\cos 2\theta \geqslant 0$,所以 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$. 故 S 的面积为

$$A = 8\iint\limits_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} \sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{2}.$$

例 7.67 证明泊松(Poisson)公式

$$\iint\limits_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u)\,\mathrm{d}u,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ (南开;川大).

证明 若 $a = b = c = 0$,则结论显然成立.

若 a, b, c 不全为零,记 $k = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$. 把单位向量 $\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}, \frac{c}{k}\right)$ 扩充成正交阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{a}{k} & \frac{b}{k} & \frac{c}{k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

作正交变换

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

则变换的雅可比行列式

$$|\boldsymbol{J}| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = |\det \boldsymbol{A}'| = 1,$$

球面 S 变成了球面 S':$u^2 + v^2 + w^2 = 1$,即

$$\iint_S f(ax + by + cz)\,\mathrm{d}S = \iint_{S'} f(ku)\,\mathrm{d}S'. \tag{1}$$

对球面 S' 上的积分作变换:

$$u = u,\quad v = \sqrt{1-u^2}\cos\theta,\quad w = \sqrt{1-u^2}\sin\theta,$$
$$-1 \leqslant u \leqslant 1,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi.$$

通过计算可知,$\mathrm{d}S' = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta\mathrm{d}u$,

$$\iint_{S'} f(ku)\,\mathrm{d}S' = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u = 2\pi\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u.$$

由式(1)知,结论成立.

注 7.11　本例证明过程中的式(1),实际上告诉我们了一个结论:第一类曲面积分在正交变换下具有不变性,即

$$\iint_S f(\boldsymbol{X})\,\mathrm{d}S = \iint_{S'} f(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{U})\,\mathrm{d}S', \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$,$\boldsymbol{A}$ 是正交阵,满足 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{A}'$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转换,曲面 S' 是曲面 S 在正交变换下的像.

关于这个一般性结论的证明:先将曲面 S 表示为参数形式,然后通过正交变换写出 S' 的参数形式,最后将式(2)两端都化成关于参数的重积分,易见两者相等.

另外,本例的结果在球坐标之下通常写成如下形式:设 $f(x)$ 连续,则成立

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(a\sin\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u.$$

类题 1　试证:

$$\left|\iint_S f(mx + ny + pz)\,\mathrm{d}S\right| \leqslant 2\pi M,$$

其中 $m^2 + n^2 + p^2 = 1$,m,n,p 为常数. $f(t)$ 在 $|t| \leqslant 1$ 上连续可微,$f(-1) = f(1) = 0$,$M = \max\limits_{-1\leqslant t\leqslant 1}\{|f'(t)|\}$,$S$ 表示半径为 1,球心在原点的球面(东北工学院).

提示 应用泊松公式,有

$$\left|\iint_S f(mx+ny+pz)\,\mathrm{d}S\right| = \left|2\pi\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u\right|.$$

分部积分可知,

$$\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u = uf(u)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} uf'(u)\,\mathrm{d}u = -\int_{-1}^{1} uf'(u)\,\mathrm{d}u,$$

故

$$\left|\int_{-1}^{1} f(u)\,\mathrm{d}u\right| \leqslant M,$$

从而原结论成立.

类题 2 设 $f(x)$ 在 $|x| \leqslant k\left(k = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0\right)$ 上连续,证明

$$\iiint_V f\left(\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\mathrm{d}V = \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u,$$

其中 $V: x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$ (广西大学).

提示 对等式左边作球坐标变换,有

$$\begin{aligned}
\text{左边} &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r\int_0^{\pi} f(a\sin\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(a\sin\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_{-1}^{1} f(ku)\,\mathrm{d}u \quad \text{(应用泊松公式)}.
\end{aligned}$$

例 7.68 计算曲面积分 $I = \iint_S \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$,其中 S 是曲面 $x^2+y^2 = R^2$ 及两个平面 $z = R, z = -R(R>0)$ 所围的立体的表面的外侧(数学Ⅰ,Ⅱ).

解 设 S_1, S_2, S_3 分别为 S 的上、下底面和圆柱侧面,则

$$\iint_{S_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{S_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

记 S_1, S_2 在 xOy 平面上的投影区域为 D_{xy},则

$$\iint_{S_1+S_2}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{D_{xy}}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} - \iint_{D_{xy}}\frac{(-R)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2} = 0.$$

在 S_3 上,

$$\iint_{S_3}\frac{z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2} = 0.$$

而 S_3 在 yOz 平面上的投影区域 $D_{yz}: -R \leqslant y \leqslant R,\ -R \leqslant z \leqslant R$,故

$$\iint_{S_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iint_{D_{yz}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{yz}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}}{R^2+z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2} = \frac{\pi^2}{2}R,$$

从而曲面积分 $I=\dfrac{\pi^2}{2}R$.

注 7.12　虽然 S 是一个封闭曲面,但被积函数在原点处有奇性,因此不能使用高斯公式. 这个题目看起来复杂,但仔细观察积分曲面和被积函数的特点会立即发现,有五个积分都是零,需要我们计算的实际上只有一个积分.

例 7.69　计算曲面积分 $I=\iint\limits_S\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,其中 S 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧,$a>0$ 为常数(数学Ⅰ).

解　采用补面法. 按常规应补平面 $S_1:x^2+y^2\leqslant a^2,z=0$. 仔细观察发现被积函数在原点处有奇性,不能直接应用高斯公式,但注意到在下半球面上的点 (x,y,z) 满足 $x^2+y^2+z^2=a^2$,则可将原曲面积分改写成

$$I=\frac{1}{a}\iint\limits_S ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

这样,取 S_1 的法向方向与 z 轴正向相反,就可对上式使用高斯公式了. 于是有

$$I=\frac{1}{a}\Big(\oiint\limits_{S_1+S}-\iint\limits_{S_1}\Big)ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a}\Big[-\iiint\limits_V(3a+2z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big],$$

其中 V 是 S_1,S 所围的空间区域. 故

$$I=\frac{1}{a}\Big(-2\pi a^4-2\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\pi a^4\Big)$$

$$=\frac{1}{a}\Big(-\pi a^4-2\int_{-a}^{0}z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big)=-\frac{\pi}{2}a^3.$$

类题　计算 $I=\iint\limits_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 是 $z=1-x^2-y^2,(z\geqslant 0)$ 的上侧(数学Ⅰ).

提示　补面 $S_1:x^2+y^2\leqslant 1,z=0$,方向取下侧. 用高斯公式易知 $I=-\pi$.

例 7.70　计算曲面积分 $I=\iint\limits_S(2x+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$,其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角(数学Ⅰ,Ⅱ).

解法 1(用高斯公式求解). 用 S_1 表示法向量指向 z 轴负方向的有向平面 $z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$,D_{xy} 表示 S_1 在 xOy 平面上的投影区域,即

$$D_{xy}:x^2+y^2\leqslant 1.$$

于是

$$\iint_{S_1}(2x+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi.$$

记 Ω 为 S 和 S_1 所围成的空间区域,则由高斯公式有

$$\begin{aligned}I&=\Big(\oint_{S+S_1}-\iint_{S_1}\Big)(2x+z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}(2+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\pi\\&=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z+\pi=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

解法 2 （用两类曲面积分的关系求解） 用 D_{xy} 表示 S 在 xOy 平面上的投影区域. 曲面 $z=x^2+y^2$ 的法向量为 $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}(-2x,-2y,1)$, 所以

$$\cos\alpha=-\frac{2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\beta=-\frac{2y}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\iint_S\left[(2x+z)\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+z\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right]\mathrm{d}S\\&=\iint_{D_{xy}}\left[(2x+x^2+y^2)\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\right]\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}[-4x^2-2x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(-4r^2\cos^2\theta-2r^3\cos^2\theta+r^2)r\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\left(-\cos^2\theta-\frac{2}{5}\cos\theta+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}\theta=-\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

另外,这个题也可直接求解.

例 7.71 求 $I=\iint_S xyz(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,\mathrm{d}S$,其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0)$ 的第一卦限部分,取外侧.

解 球面在点 (x,y,z) 处的法向量为 $\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$, 由两类曲面积分的关系,有

$$I=a\iint_S\left(y^3z^3\frac{x}{a}+z^3x^3\frac{y}{a}+x^3y^3\frac{z}{a}\right)\mathrm{d}S$$

$$= a\iint_S y^3z^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^3x^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3a\iint_S x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (\text{利用轮换对称性})$$

$$= 3a\iint_{D_{xy}} x^3y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D_{xy}:x^2+y^2\leqslant a^2, x\geqslant 0, y\geqslant 0$. 作极坐标变换,有

$$I = 3a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}r$$

$$= \frac{3}{64}a^9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 2\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{32}a^9.$$

例 7.72　计算曲线积分

$$I = \oint_L (y^2+z^2)\mathrm{d}x + (z^2+x^2)\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

L 是 $x^2+y^2+z^2 = 2r_1x$ 与 $x^2+y^2 = 2r_2x$ 的交线 $(0<r_2<r_1, z>0)$,L 的方向是使 L 所围的球面上较小部分区域保持在左边.

解　由于球面的外法向的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x-r_1}{r_1},\quad \cos\beta = \frac{y}{r_1},\quad \cos\gamma = \frac{z}{r_1},$$

所以由斯托克斯公式,有

$$I = \iint_S \begin{vmatrix} \dfrac{x-r_1}{r_1} & \dfrac{y}{r_1} & \dfrac{z}{r_1} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2+z^2 & z^2+x^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$= \frac{2}{r_1}\iint_S [(y-z)(x-r_1) + (z-x)y + (x-y)z]\mathrm{d}S$$

$$= 2\iint_S (z-y)\mathrm{d}S,$$

其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2 = 2r_1x$ 由 L 所围的部分.

由于曲面 S 关于 xOz 平面对称,所以 $\iint_S y\mathrm{d}S = 0$. 又由

$$\iint_S z\mathrm{d}S = \iint_S r_1\cos\gamma\mathrm{d}S = \iint_S r_1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= r_1\iint_{x^2+y^2\leqslant 2r_2x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = r_1\cdot\pi r_2^2$$

可知,

$$I = 2\pi r_1 r_2^2.$$

注 7.13 本例亦可用参数方程求解,但非常复杂. 具体说来,先将 L 用参数方程表示:

$$x = r_1(1+\cos t),\quad y = r_2\sin t,$$

$$z = \sqrt{2r_2(r_1-r_2)}\ \sqrt{1+\cos t},t \text{ 从 } 0 \text{ 到 } 2\pi.$$

则有

$$I = \int_0^{2\pi}\Big\{[r_2^2\sin^2 t + 2r_2(r_1-r_2)(1+\cos t)](-r_2\sin t) +$$

$$[2r_2(r_1-r_2)(1+\cos t) + r_2^2(1+\cos t)^2]r_2\cos t +$$

$$[r_2^2(1+\cos t)^2 + r_2^2\sin^2 t]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2r_2(r_1-r_2)}{1+\cos t}}(-\sin t)\Big\}\mathrm{d}t$$

有兴趣的同学可以尝试一下,完成本题.

例 7.73 计算曲面积分

$$I = \oiint_S (x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

S 是闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$,方向取外侧.

解 由高斯公式,可得

$$I = \iiint_\Omega (1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 Ω 是由闭曲面 S 所围的空间区域.

作变换:$u = x-y+z, v = y-z+x, w = z-x+y$,则

$$|J| = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{1}{\left|\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|} = \frac{1}{4},$$

区域 Ω 变成 Ω':$|u|+|v|+|w|\leqslant 1$. 由对称性,有

$$I = 8\cdot\frac{1}{4}\iiint\limits_{\substack{u+v+w\leqslant 1\\ u,v,w\geqslant 0}} 3\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= 6\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = 1$$

类题 计算曲面积分

$$I = \iint_D (x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2y+\sin(x+z)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (3z+\mathrm{e}^{x+y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$ 的外表面(武大).

答案 $I = 2$.

例 7.74　计算第二型曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} [f(x,y,z) + x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z + [2f(x,y,z) + y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x + [f(x,y,z) + z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x - y + z = 1$ 在第四卦限部分，方向取上侧.

分析　即使补充三个坐标平面使之与 Σ 一起构成封闭曲面，但由于 f 的光滑性不够，我们仍然无法使用高斯公式. 下面采用所谓的“归一化”方法，将“未知”的 f 消去.

解　设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \cos\alpha\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \cos\beta\mathrm{d}S$，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cos\gamma\mathrm{d}S$. 由此可得 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

具体到本例，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，因而 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x = -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} \{[f(x,y,z) + x] - [2f(x,y,z) + y] + [f(x,y,z) + z]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma} (x - y + z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

其中 $D_{xy} = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 + y, -1 \leqslant y \leqslant 0\}$ 是曲面 Σ 在 xOy 平面的投影.

例 7.75　计算曲面积分

$$I = \iint_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是由下面参数方程所给出的曲面

$$\begin{cases} x = (a + b\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (a + b\cos\theta)\sin\varphi, \\ z = b\sin\theta, \end{cases}$$

方向取外侧(式中 θ, φ 为参数，$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$，$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$，$a, b$ 为常数，$a > b > 0$)(复旦大学).

解　计算易知

$$A = -b(a + b\cos\theta)\cos\theta\cos\varphi, \quad B = -b(a + b\cos\theta)\cos\theta\sin\varphi,$$
$$C = -b\sin\theta\sin\varphi(a + b\cos\theta)(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

由此可以看出向量 (A,B,C) 与 S 的外法向方向相反(例如，考察第一卦限曲面 S 上任一点处的 C 值发现 $C < 0$，而在该点处的外法向的方向余弦 $\cos\gamma > 0$，所以向量 (A,B,C) 与 S 的外法向方向相反)，故将 I 化成关于 θ, φ 的积分后前面取“$-$”号，即

$$I = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} [-b(a + b\cos\theta)^2\cos\theta\cos^2\varphi - b(a + b\cos\theta)^2\cos\theta\sin^2\varphi -$$

$$b^2\sin^2\theta(a+b\cos\theta)(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi]\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pi b\int_0^{2\pi}(2b^2\cos^3\theta+ab\sin^2\theta+b^2\sin^2\theta\cos\theta+4ab\cos^2\theta+2a^2\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=5ab^2\pi.$$

例 7.76 计算曲线积分

$$I=\int_{AB}(x^2+y+z)\mathrm{d}x+(y^2+x+z)\mathrm{d}y+(z^2+x+y)\mathrm{d}z,$$

其中 $A(0,0,0)$,$B(1,1,1)$.

解 记 $P=x^2+y+z$,$Q=y^2+x+z$,$R=z^2+x+y$. 易见,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}.$$

由此知,积分与路径无关.

由

$$(x^2+y+z)\mathrm{d}x+(y^2+x+z)\mathrm{d}y+(z^2+x+y)\mathrm{d}z$$

$$=\mathrm{d}\left[\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)\right]+\mathrm{d}(xy+yz+zx)$$

$$=\mathrm{d}\left[\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)+xy+yz+zx\right]$$

可知,原函数 $u(x,y,z)=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)+xy+yz+zx+C$. 故

$$I=u(x,y,z)\Big|_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}=4.$$

例 7.77 设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分

$$\oint_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$$

的值恒为同一常数.

(1)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C,有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0;$$

(2)求 $\varphi(y)$ 的表达式.

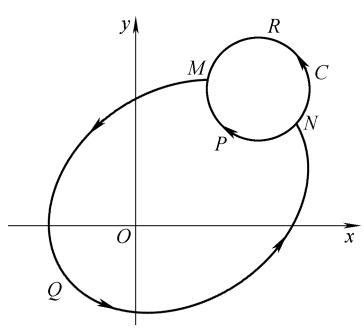


图 7-7 例 7.77 图

证明 (1)如图 7-7 所示,设 C 是 $x>0$ 内的任一分段光滑简单闭曲线. 在 C 上任取两点 M,N,作围绕原点的闭曲线 $\overset{\frown}{MQNRM}$,同时得到了

另一条围绕原点的闭曲线$\overset{\frown}{MQNPM}$. 由已知条件, 有

$$\oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} = \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4}.$$

于是

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{\varphi(y)\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y}{2x^2 + y^4} &= \int_{\overset{\frown}{NRM}} + \int_{\overset{\frown}{MPN}} \\ &= \int_{\overset{\frown}{NRM}} - \int_{\overset{\frown}{NPM}} \\ &= \oint_{\overset{\frown}{MQNRM}} - \oint_{\overset{\frown}{MQNPM}} = 0.\end{aligned}$$

解　(2)记 $P(x,y) = \dfrac{\varphi(y)}{2x^2 + y^4}, Q(x,y) = \dfrac{2xy}{2x^2 + y^4}$,则 P, Q 在 $x > 0$ 上的单连通区域内有一阶连续编导数,且对任意分段光滑简单闭曲线 C,有 $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$. 它的等价条件是 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 即

$$\frac{-4x^2y + 2y^5}{(2x^2 + y^4)^2} = \frac{2x^2\varphi'(y) + \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3}{(2x^2 + y^4)^2}.$$

比较上式两边可得

$$\begin{cases}\varphi'(y) = -2y, & (1)\\ \varphi'(y)y^4 - 4\varphi(y)y^3 = 2y^5. & (2)\end{cases}$$

由式(1)得,$\varphi(y) = -y^2 + c$. 将其代入式(2)可得 $c = 0$,从而 $\varphi(y) = -y^2$.

第八讲　不　等　式

在这一讲中,我们将首先介绍几个著名的不等式及其应用,其次系统地介绍证明不等式的方法与技巧.

一、几个著名的不等式

例 8.1　平均值不等式　对任意 n 个正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \leqslant \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

当且仅当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都相等时,等号成立.

简单地说,调和平均值 ⩽ 几何平均值⩽算术平均值.

证明　先证明右边的不等式成立. 用数学归纳法.

当 $n=1,2$ 时,不等式显然成立.

当 $n=2^k(k\in\mathbf{N}_+)$ 时,不等式是 $\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$ 的直接推论.

当 $n\neq 2^k$ 时,取 $l\in\mathbf{N}_+$,使 $2^{l-1}<n<2^l$. 记

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=\bar{a},$$

在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 后面加上 (2^l-n) 个 $\bar{a}$,将其扩充成 2^l 个正数. 对这个 2^l 个正数应用已证得的不等式,可得

$$\frac{1}{2^l}[a_1+a_2+\cdots+a_n+(2^l-n)\bar{a}]\geqslant(a_1a_2\cdots a_n\bar{a}^{2^l-n})^{\frac{1}{2^l}}=\bar{a},$$

即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

对 $\frac{1}{a_1},\frac{1}{a_2},\cdots,\frac{1}{a_n}$ 使用上面的结论,便可得左边的不等式.

这个不等式也可用 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上的凸性来证明.

例 8.2　设 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 为 $[0,1]$ 上的非负连续函数. 求证:存在 $\xi\in[0,1]$,使得

$$\prod_{k=1}^{n}f_k(\xi)\leqslant\prod_{k=1}^{n}\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x.$$

证明　记

$$a_k = \int_0^1 f_k(x)\,\mathrm{d}x, k = 1,2,\cdots,n.$$

若有某个 $a_k = 0$,则结论显然成立.

设 $a_k > 0 (k = 1,2,\cdots,n)$. 由平均值不等式,有

$$\int_0^1 \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{f_k(x)}{a_k}\,\mathrm{d}x = 1.$$

再由积分中值定理,存在 $\xi \in [0,1]$,使得

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k(\xi)}{a_k}} \leqslant 1,$$

结论得证.

例 8.3　施瓦茨(Schwarz)不等式　设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}.$$

证明　设 $\int_a^b g^2\,\mathrm{d}x > 0$,对任意实数 λ 则有

$$\int_a^b (f + \lambda g)^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

即

$$\lambda^2 \int_a^b g^2\,\mathrm{d}x + 2\lambda \int_a^b fg\,\mathrm{d}x + \int_a^b f^2\,\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

由实数 λ 的任意性,故其判别式 $\Delta \leqslant 0$, 即

$$\left(\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b g^2\,\mathrm{d}x\right).$$

若 $\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_a^b g^2\,\mathrm{d}x$ 同时为零,则由不等式

$$|fg| \leqslant \frac{f^2 + g^2}{2}$$

可知,

$$0 \leqslant \left|\int_a^b fg\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |fg|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_a^b f^2\,\mathrm{d}x + \int_a^b g^2\,\mathrm{d}x\right) = 0,$$

此时不等式变成等式,当然成立.

注 8.1　这个不等式也称柯西-施瓦茨不等式. 它的离散形式是

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

利用例 8.3 可很快捷地证明下面的结论.

类题 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,则

(1) $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$;

(2)当$f(x)>0$时,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

提示 (2) $(b-a)^2=\left(\int_a^b\mathrm{d}x\right)^2=\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}\mathrm{d}x\right)^2$

$$\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}.$$

若$f(x)$在$[a,b]$上连续,也可用二重积分来证明.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}=\iint_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(y)}{f(x)}+\frac{f(x)}{f(y)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\geqslant\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2,$$

其中$D=[a,b]\times[a,b]$.

类题2 已知$f(x)\geqslant0$在$[a,b]$上连续,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=1$,$k$为任意实数,证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2\leqslant1.$$

(中国科大).

类题3 设$f(x)$在$[a,b]$上连续可导,$f(a)=f(b)=0$,$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=1$,证明:

$$\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{4}.$$

提示 由施瓦茨不等式

$$\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x\cdot\int_a^b x^2f^2(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_a^b xf(x)f'(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

然后分部积分即可.

例8.4 设$f(x)$在$[a,b]$上有连续的导函数,$f(a)=0$,证明:

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\frac{b-a}{2}\int_a^b(f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

证明 令$g(x)=\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t$ $(a\leqslant x\leqslant b)$,则$g'(x)=|f'(x)|$.由$f(a)=0$可知,

$$|f(x)|=|f(x)-f(a)|=\left|\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t=g(x).$$

于是有

$$\int_a^b|f(x)f'(x)|\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)g'(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}g(x)$$

$$= \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_a^b = \frac{1}{2}\left(\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_a^b 1 \cdot |f'(t)|\mathrm{d}t\right)^2$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b 1^2\mathrm{d}t \cdot \int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$= \frac{b-a}{2}\int_a^b (f'(t))^2\mathrm{d}t.$$

例 8.5　杨格(W. H. Young)不等式　设 $y = f(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的严格单调递增的连续函数，$f(0) = 0$，$x = g(y)$ 是它的反函数，$a, b \geqslant 0$，则

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y \geqslant ab.$$

证法 1　利用几何直观来证. 若 $ab = 0$，则不等式显然成立.

不妨设 $a, b > 0$，分三种情形证明：

(1)若 $b = f(a)$，则显然有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y = ab;$$

(2)若 $b > f(a)$，记 $f(a) = c$，则 $0 < c < b$，且有

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^b g(y)\mathrm{d}y$$

$$= \left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \int_0^c g(y)\mathrm{d}y\right] + \int_c^b g(y)\mathrm{d}y$$

$$= ac + \int_c^b g(y)\mathrm{d}y \geqslant ac + \int_c^b g(c)\mathrm{d}y \quad (\text{利用了 } g(y) \text{ 的单增性})$$

$$= ac + g(c)(b-c) = ac + a(b-c) = ab;$$

(3)若 $b < f(a)$，此时 $a > g(b)$，类似于(2)可证.

杨格不等式的几何示意图如图 8-1 所示.

证法 2　用分析法来证. 仅证 $b = f(a)$ 的情形.

因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递增且连续，故其反函数 $x = g(y)$ 在 $[0,b]$ 上单调递增且连续. 将区间 $[0,a]$ n 等分，

$$T:\ 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = a,$$

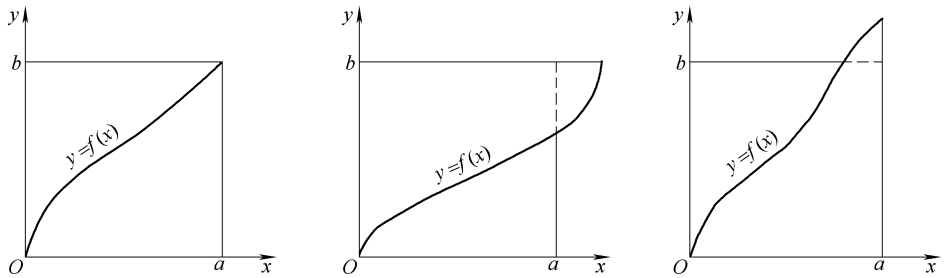
相应地点 $y_i = f(x_i)(i = 0,1,\cdots,n)$ 构成区间 $[0,b]$ 的一个分割

$$T':\ 0 = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_n = b.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，所以它在 $[0,a]$ 上一致连续，故当 $n \to \infty$，即 $\|T\| \to 0$ 时，有

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta y_i\} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \to 0.$$

于是，由定积分的定义，得



a) $b=f(a)$　　b) $b>f(a)$　　c) $b<f(a)$

图　8-1

$$\begin{aligned}
&\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\\
&=\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} g(y_{i-1})\Delta y_i\Big)\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_i)(x_i-x_{i-1})+x_{i-1}(f(x_i)-f(x_{i-1}))\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i f(x_i)-x_{i-1}f(x_{i-1})\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\left[x_n f(x_n)-x_0 f(x_0)\right]\\
&=af(a)-0\cdot f(0)=af(a).
\end{aligned}$$

至于 $b>f(a)$ 与 $b<f(a)$ 的情形用与证法 1 相同的思路.

简单推论　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增且连续,$f(0)=0$,$a,b\geqslant 0$, 证明:

$$ab\leqslant af(a)+bf^{-1}(b).$$

下面给出杨格不等式的两个应用.

例 8.6　设 $a,b>0,p>1,\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,证明:

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

证明　因为 $p>1$,所以 $f(x)=x^{p-1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增且连续,其反函数为 $g(y)=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}$. 由杨格不等式,有

$$\begin{aligned}
ab&\leqslant\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\,\mathrm{d}y\\
&\leqslant\int_0^a x^{p-1}\,\mathrm{d}x+\int_0^b y^{q-1}\,\mathrm{d}y=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.
\end{aligned}$$

另外,若令 $\Phi(b)=\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}-ab$,求出 $\Phi(b)$ 的最小值点,利用最值法也可证该不等式.

类题 1　设 $a,b>0,p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,证明:

$$a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}}\leqslant\frac{a}{p}+\frac{b}{q}.$$

提示　在例 8.6 中,将 a 换成 $a^{\frac{1}{p}}$,b 换成 $b^{\frac{1}{q}}$ 或在杨格不等式中取 $f(x)=x^{p-1}$,此时 $g(y)=y^{q-1}$,并将 a 换成 $a^{\frac{1}{p}}$,b 换成 $b^{\frac{1}{q}}$ 即可.

类题 2　设 $a,b>0,p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,证明:$\forall\varepsilon>0$,有

$$ab\leqslant\frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q}{q}\leqslant\varepsilon a^p+\varepsilon^{-\frac{q}{p}}b^q.$$

例 8.7　设 $a,b\geqslant 1$,证明不等式:

$$ab\leqslant e^{a-1}+b\ln b.$$

证明　取 $f(x)=e^x-1$,则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增且连续,其反函数 $g(y)=\ln(1+y)$. 利用杨格不等式,可得

$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)&\leqslant\int_0^{a-1}f(x)\mathrm{d}x+\int_0^{b-1}g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^{a-1}(e^x-1)\mathrm{d}x+\int_0^{b-1}\ln(1+y)\mathrm{d}y\\&=e^{a-1}+b\ln b-(a+b-1),\end{aligned}$$

即

$$ab\leqslant e^{a-1}+b\ln b.$$

例 8.8　**赫尔德(Hölder)不等式**　设 $f(x),g(x)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积,$p,q>1$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,则

$$\left|\int_\alpha^\beta fg\mathrm{d}x\right|\leqslant\left(\int_\alpha^\beta|f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta|g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $p=q=2$ 时,该不等式即为施瓦茨不等式.

证明　先设 f,g 是 $[\alpha,\beta]$ 上的非负可积函数.

如果 $\int_\alpha^\beta|f|^p\mathrm{d}x$ 与 $\int_\alpha^\beta|g|^q\mathrm{d}x$ 之一为零,不妨设 $\int_\alpha^\beta|f|^p\mathrm{d}x=0$,则此时赫尔德不等式右边为零,我们将证明左边也为零.

事实上,设 $0\leqslant f(x),g(x)\leqslant M,x\in[\alpha,\beta]$. 由可积性条件,$\forall\varepsilon>0,\eta>0$,存在 $[\alpha,\beta]$ 的分割 T,使得分割 T 中满足 $f^p(x)\geqslant\varepsilon^p$ 的区间长度之和不超过 η. 并

且当分割细度充分小时,有

$$0 \leqslant \sum f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{f<\varepsilon} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{f\geqslant\varepsilon} f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i$$

$$< M\varepsilon(\beta-\alpha) + M^2\eta,$$

故 $$\int_\alpha^\beta f\cdot g\mathrm{d}x = 0.$$

如果 $\int_\alpha^\beta |f|^p\mathrm{d}x > 0, \int_\alpha^\beta |g|^q\mathrm{d}x > 0$, 则令

$$a = \frac{f}{\left(\int_\alpha^\beta |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}}, \quad b = \frac{g}{\left(\int_\alpha^\beta |g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}},$$

显然 $a,b \geqslant 0$. 由例 8.6 的不等式,有

$$\frac{fg}{\left(\int_\alpha^\beta |f|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\alpha^\beta |g|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}} \leqslant \frac{f^p}{p\int_\alpha^\beta |f|^p\mathrm{d}x} + \frac{g^q}{q\int_\alpha^\beta |g|^q\mathrm{d}x}$$

对上式两边从 α 到 β 积分,并注意到 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 可得结论.

当 f,g 变号时,由不等式 $\left|\int_\alpha^\beta f\cdot g\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_\alpha^\beta |f|\cdot|g|\mathrm{d}x$, 利用已证得的结论可知赫尔德不等式也成立.

注 8.2 赫尔德不等式的离散形式:设 $a_k,b_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是两组正实数,$p,q>1$,且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 则

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^n a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^n b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

当 $p=q=2$ 时,上述不等式就是柯西-施瓦茨不等式.

例 8.9 试证明:

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi^3}{4} \quad (a>0).$$

证明 令 $x = t+\frac{\pi}{2}$,则

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos t}\mathrm{d}t.$$

于是原不等式左边变为

$$\int_0^\pi xa^{\sin x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\cos x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{-\cos x}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^{\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos x}{2}}\mathrm{d}x\right)^2 \quad (\text{应用了赫尔德不等式})$$

$$= \frac{\pi^3}{4}.$$

二、利用凸函数的性质证明不等式

凸(凹)函数常见的定义是如下的定义1和定义2,可以证明两者是等价的.

定义1　设$f(x)$在区间I上连续,若对I上任意两点x_1,x_2,总成立

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant (\geqslant) \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称$f(x)$是I上的凸(凹)函数.

定义2　设$f(x)$是定义在区间I上的函数,若对I上任意两点x_1,x_2和实数$\lambda \in (0,1)$,总成立

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant (\geqslant) \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2),$$

则称$f(x)$是I上的凸(凹)函数.

凸函数的基本性质

1. f为区间I上凸函数的充要条件是:对I上任意三点$x_1 < x_2 < x_3$,总有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2},$$

或

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

如图8-2所示,这个性质的几何意义是明显的,即f为I上的凸函数$\Leftrightarrow \overline{P_2P_1}$的斜率$\leqslant \overline{P_3P_2}$的斜率或$\overline{P_2P_1}$的斜率$\leqslant \overline{P_3P_1}$的斜率.

2. 若$f(x)$在区间I上二阶可导,则下面关于凸函数的四个命题等价:

(1) f是I上的凸函数;

(2) f'在I上单调递增;

(3) $f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $\forall x_0 \in I$, 其几何意义是:切线在曲线下方;

(4) $f'' \geqslant 0$.

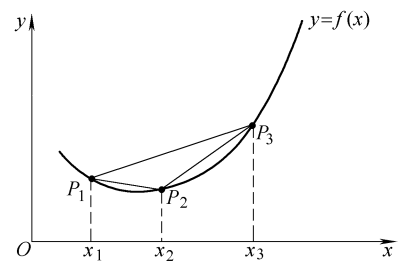


图　8-2

值得大家注意的是,凸函数的定义2是借助于几何直观来定义,即"弦在曲线的上方".我们利用凸函数的性质证明不等式,主要是用曲线在切线或弦的一侧这一几何特性来实现的!因此,在做题时,大家要尽量借助几何直观来思考!

例8.10　**詹森(Jensen)不等式**　设f是区间I上的凸函数,则$\forall x_1,x_2,\cdots,x_n \in I$和$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n > 0$,且$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n = 1$,都有

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

证明 用数学归纳法. 当 $n=2$ 时,这正是凸函数的定义2. 设 $n=k\geqslant 2$ 时命题成立,将证 $n=k+1$ 时,命题也成立.

设 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in I$ 及 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{k+1}>0$,且 $\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i=1$. 令

$$\mu_i=\frac{\lambda_i}{1-\lambda_{k+1}},i=1,2,\cdots,k,$$

易见 $\mu_i>0$ 且 $\sum_{i=1}^{k}\mu_i=1$, 此时还有 $\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i\in I$. 利用 $n=2$ 及 $n=k\geqslant 2$ 的结论可得

$$\begin{aligned}f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i x_i\right)&=f\left((1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i+\lambda_{k+1}x_{k+1}\right)\\&\leqslant(1-\lambda_{k+1})f\left(\sum_{i=1}^{k}\mu_i x_i\right)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\&\leqslant(1-\lambda_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\mu_i f(x_i)+\lambda_{k+1}f(x_{k+1})\\&=\sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i f(x_i),\end{aligned}$$

综上知,结论成立.

注 8.3 1. 詹森不等式有下面更为一般的形式:设 f 在区间 I 上是凸函数,则 $\forall x_1,x_2,\cdots,x_n\in I$ 及 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n>0$, 都有

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}\right)\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}\beta_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i}.$$

提示 在例8.10中,令 $\lambda_i=\frac{\beta_i}{\sum_{i=1}^{n}\beta_i},i=1,2,\cdots,n$, 立即可得结论.

2. 在例8.10中若取 $\lambda_i=\frac{1}{n}$, 则结论变为

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i).$$

这个不等式会经常用到,在 $f'(x)$ 存在的情况下,对它我们也可用如下方法证明.

令 $x_0 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}$，由凸函数 f 的性质，有

$$f(x_i) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_i - x_0) \quad (i = 1,2,\cdots,n).$$

对上面 n 个不等式作和，可得

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geqslant nf(x_0) + f'(x_0)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - nx_0\right) = nf(x_0),$$

此即为欲证的不等式.

例 8.11　设 $\Phi(x)$ 是 $[m,M]$ 上的有界凸函数，$f(x)$，$p(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，$p(x) \geqslant 0$，$\int_a^b p(x)\mathrm{d}x > 0$，证明不等式

$$\Phi\left(\frac{\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}\right) \leqslant \frac{\int_a^b p(x)\Phi(f(x))\mathrm{d}x}{\int_a^b p(x)\mathrm{d}x}.$$

证明　将区间 $[a,b]$ n 等分，记分点为 $x_i = a + \dfrac{i}{n}(b-a)$，$i = 0,1,\cdots,n$.

$\forall \xi_i \in [x_{i-1},x_i]$，记 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{1}{n}(b-a)$，将积分写成积分和得

$$\Phi\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)f(\xi_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta x_i}\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p(\xi_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta x_i} f(\xi_i)\right)$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{p(\xi_i)\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta x_i}\Phi(f(\xi_i)) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Phi(f(\xi_i))\Delta x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p(\xi_i)\Delta x_i} \quad (\text{利用了詹森不等式}).$$

因为 $\Phi(x)$ 是 $[m,M]$ 上的凸函数，所以 $\Phi(x)$ 在 $[m,M]$ 上连续. 注意到 f,p 的可积性，在上式中令 $n \to \infty$ 可得结论.

类题 1　若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x) > 0$，证明：

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

提示　利用 $\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是凹函数，仿例 8.11 可证之.

类题 2　设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上处处二阶可微，且 $f''(x) \geqslant 0$，$u = u(t)$ 为任一连续函数. 证明

$$\frac{1}{a}\int_a^b f(u(t))\mathrm{d}t \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a u(t)\mathrm{d}t\right).$$

提示 此题是例 8.11 的特例. 将例 8.11 中的 Φ 换成 f,f 换成 u,取 $p(x) = 1$ 即可.

类题 3 设 $F(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $F''(x) > 0$,$f(x)$ 为 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数,证明:

$$F\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(f(x))\sin x\mathrm{d}x.$$

提示 此题也是例 8.11 的特例. 取 $p(x) = \sin x$, 并注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\mathrm{d}x = 1$ 即可.

例 8.12 **阿达玛(Hadamard)不等式** 设 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数,证明:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证明 先证左边的不等式. 由第四讲中定积分的计算技巧知,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{a+b}{2}} [f(x) + f(a+b-x)]\mathrm{d}x$$

$$\geqslant 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \quad (\text{利用了凸函数的定义}),$$

此即为

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

再证右边的不等式. 作变量替换 $t = \frac{b-x}{b-a}$, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant (b-a)\int_0^1 [tf(a) + (1-t)f(b)]\mathrm{d}t \quad (\text{利用了凸函数的定义})$$

$$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

类题 证明: $\frac{\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b}{a-b} < \frac{\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b}{2}$ $(a \neq b)$.

例 8.13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导,且 $f(x) \geqslant 0$, $f''(x) < 0$. 证明:

$$f(x) \leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t, x \in [a,b] \text{(华东师大)}.$$

证明 由已知条件可知, $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的严格凹函数. 设 $x_0 \in [a,b]$ 是 $f(x)$ 的最大值点,则必有 $f(x_0) > 0$. 由凹函数的性质,对任意的 $x \in [a,b]$,有

$$f(x_0) \leqslant f(x) + f'(x)(x_0 - x).$$

对上式两边在$[a,b]$上积分,可得:

$$\begin{aligned}(b-a)f(x_0) &\leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + x_0\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b xf'(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + x_0(f(b)-f(a)) - xf(x)\Big|_a^b + \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\\ &= 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + [(x_0-b)f(b) + (a-x_0)f(a)].\end{aligned}$$

注意到$(x_0-b)f(b)+(a-x_0)f(a)\leqslant 0$,有

$$f(x_0)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

从而,对任意的$x\in[a,b]$,有

$$f(x)\leqslant \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

例 8.14　设$f(x)$在$[0,1]$上是凸函数,$f(0)>f(1)$,证明:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

对充分大的n成立.

证明　由例 8.12 的右边不等式知,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2n}[f(1)+f(0)] + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right);\end{aligned}$$

另一方面,由例 8.12 的左边不等式有,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)\mathrm{d}x + \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{2k-1}{2n}}^{\frac{2k+1}{2n}} f(x)\mathrm{d}x + \int_{1-\frac{1}{2n}}^1 f(x)\mathrm{d}x\\ &\geqslant \frac{1}{2n}f(\xi_n) + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{2n}f(\eta_n),\end{aligned}$$

这里对上式右边的第一、第三项应用了积分中值定理,其中$\xi_n\in\left[0,\frac{1}{2n}\right]$,$\eta_n\in\left[1-\frac{1}{2n},1\right]$.

下面只需证明$\frac{1}{2}[f(\xi_n)+f(\eta_n)]>f(1)$即可. 由$f$的连续性及$\xi_n\to 0$,$\eta_n\to 1(n\to\infty)$,并注意到

$$\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]>f(1)$$

可知,$\exists N>n$,当$n>N$时,有

$$\frac{1}{2}[f(\xi_n)+f(\eta_n)]>f(1).$$

例 8.15 设 $a>0,b>0$, 证明:

$$(ab)^{\frac{a+b}{2}}\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}\leqslant a^a b^b.$$

证明 左边的不等式显然成立,下面证明右边的不等式.

取 $f(x)=x\ln x$,则 $f''(x)=\frac{1}{x}>0,x\in(0,+\infty)$,即 $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数,故由

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$$

可得

$$\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}\leqslant\frac{1}{2}(a\ln a+b\ln b).$$

由此可得右边的不等式.

例 8.16 设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 证明:

$$(\sin x)^{1-\cos 2x}+(\cos x)^{1+\cos 2x}\geqslant\sqrt{2}.$$

证明 原不等式等价于

$$(\sin^2 x)^{\sin^2 x}+(\cos^2 x)^{\cos^2 x}\geqslant\sqrt{2}.$$

取 $f(x)=x^x,x\in(0,+\infty)$,则由 $f''(x)=x^{x-1}[x(\ln x+1)^2+1]>0$ 可知, $f(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的凸函数. 若记 $a=\sin^2 x,b=\cos^2 x$, 由凸函数的性质

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[f(a)+f(b)],$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\frac{1}{2}[(\sin^2 x)^{\sin^2 x}+(\cos^2 x)^{\cos^2 x}],$$

亦即

$$(\sin^2 x)^{\sin^2 x}+(\cos^2 x)^{\cos^2 x}\geqslant\sqrt{2}.$$

类题 1 证明不等式

$$\sin^{10}x+\cos^{10}x\geqslant\frac{1}{16}.$$

提示 取 $f(x)=x^5$,易见 $f(x)$ 是凸函数,利用凸函数的性质可得结论.

类题 2 设 $a,b,c>0$,证明不等式:

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\leqslant a^a b^b c^c.$$

提示 取 $f(x)=x\ln x$,则 $f(x)$ 是凸函数. 于是, 有

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{1}{3}(a\ln a+b\ln b+c\ln c).$$

利用平均值不等式,有

$$\frac{a+b+c}{3}\ln(\sqrt[3]{abc})\leqslant\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},$$

此即为结论.

例 8.17　设 $a,b>0,a\neq b$, 证明不等式

$$\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}>\left(\frac{a}{b}\right)^{b}.$$

证明　不妨设 $a>b>0$, 用两种方法来证.

证法 1　用凸函数的性质来证. 原不等式等价于

$$\left(\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\right)^{b+1}>\left(\frac{a}{b}\right)^{b}$$

$$\Leftrightarrow(b+1)\ln\left(\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\right)>b\ln\frac{a}{b}$$

$$\Leftrightarrow\ln\left(\frac{1}{b+1}+\frac{b}{b+1}\cdot\frac{a}{b}\right)>\frac{1}{b+1}\ln 1+\frac{b}{b+1}\ln\frac{a}{b}.$$

注意到 $-\ln x$ 是凸函数,由凸函数的性质易知上式成立.

证法 2　用函数的单调性来证. 原不等式等价于

$$(b+1)[\ln(a+1)-\ln(b+1)]>b(\ln a-\ln b).$$

令

$$f(a)=(b+1)[\ln(a+1)-\ln(b+1)]-b(\ln a-\ln b),a>b>0,$$

由 $f'(a)=\dfrac{a-b}{a(a+1)}>0$ 知,$f(a)$ 在 $a>b$ 上严格单增,故

$$f(a)>f(b)=0.$$

从而原不等式成立.

三、利用函数的单调性与极值证明不等式

例 8.18　设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, 证明:

$$\frac{1}{\sin^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}+1-\frac{4}{\pi^2}.$$

证明　令 $f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$,则

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}.$$

于是

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x^3} > \frac{\cos x}{\sin^3 x} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

令

$$g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} - x,$$

则

$$g'(x) = \cos^{\frac{2}{3}} x + \frac{1}{3}\sin^2 x \cos^{-\frac{4}{3}} x - 1,$$

$$g''(x) = \frac{4}{9}\sin^3 x \cos^{-\frac{7}{3}} x > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

由此知 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,故 $g'(x) > g'(0) = 0$. 于是知 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,故 $g(x) > g(0) = 0$,从而 $f'(x) > 0$, 这样就有

$$f(x) < f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2},$$

即

$$\frac{1}{\sin^2 x} \leqslant \frac{1}{x^2} + 1 - \frac{4}{\pi^2}$$

推论 当 $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ 时,证明: $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 > \cos x$.

例 8.19 设 $0 < x < 1$,证明: $xe^{-x} > \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}$.

证明 原不等式 $\Leftrightarrow \ln x - x > -\ln x - \frac{1}{x}$

$$\Leftrightarrow 2\ln x - x + \frac{1}{x} > 0, \quad 0 < x < 1.$$

令 $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$,则 $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0$,故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减. 于是 $f(x) > f(1) = 0$, 从而原不等式成立.

例 8.20 设 $x, y > 0, \beta > \alpha > 0$, 证明:

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

证明 不妨设 $y \geqslant x$, 将原不等式变形为:

$$\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} > \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^\beta\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

取 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}, a \geqslant 1, t > 0$, 则

$$f'(t)=\frac{ta^t\ln a-(1+a^t)\ln(1+a^t)}{t^2(1+a^t)}f(t).$$

由此知,

$$f'(t)<0\Leftrightarrow ta^t\ln a-(1+a^t)\ln(1+a^t)<0,\quad t>0.$$

令 $g(t)=ta^t\ln a-(1+a^t)\ln(1+a^t)$,则

$$\begin{aligned}g'(t)&=a^t\ln a(t\ln a-\ln(1+a^t))\\&=a^t\ln a\left(t\ln a-t\ln a-\ln\left(1+\frac{1}{a^t}\right)\right)\\&=-a^t\ln a\ln\left(1+\frac{1}{a^t}\right)<0,\quad t>0.\end{aligned}$$

由此知, $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,所以 $g(t)<g(0)=-2\ln 2<0$,故 $f'(t)<0$. 于是 $f(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,从而原不等式成立.

类题　设 $0<x<y<\frac{\pi}{2}$,证明下列不等式:

1. $\frac{x}{y}<\frac{\sin x}{\sin y}$;

2. $\frac{x}{y}>\frac{\tan x}{\tan y}$.

例 8.21　设 $b>a>0$,证明

$$\sqrt{ab}<\frac{b-a}{\ln b-\ln a}<\frac{a+b}{2}.$$

(河南大学).

证明　将原不等式改写为:

$$\frac{2(b-a)}{a+b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},\quad b>a>0,$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}},\quad x>1,\quad (令\ x=\frac{b}{a}>1).$$

先证左边的不等式.

令 $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$,则 $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$,所以 $f(x)$ 在 $x>1$ 上单调递增,于是有 $f(x)>f(1)=0$,即

$$\frac{2(x-1)}{x+1}<\ln x,\quad x>1.$$

再证右边的不等式.

为此令 $g(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\ln x$,则 $g'(x)=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}>0$,$x>1$,所以 $g(x)$ 在

$x>1$ 上单调递增,于是有 $g(x)>g(1)=0$, 即

$$\ln x<\frac{x-1}{\sqrt{x}}.$$

类题 设 $m>n>0$, 证明:

$$\frac{m-n}{m}<\ln\frac{m}{n}<\frac{m-n}{n}.$$

例 8.22 证明不等式

$$2^x+2^{\frac{1}{x}}<2^{x+\frac{1}{x}},\quad x\in(0,1).$$

(中科院—中科大).

证明 原不等式 $\Leftrightarrow 1+2^{\frac{1}{x}-x}<2^{\frac{1}{x}}, x\in(0,1)$.

令 $f(x)=2^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}-x}-1$,则 $f(1)=0, f'(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2 2^x}(1+x^2-2^x)$.

而 $$f'(x)<0\Leftrightarrow 1+x^2-2^x<0,$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2)-x\ln 2<0,\quad x\in(0,1).$$

令 $g(x)=x\ln 2-\ln(1+x^2)$,则 $g(0)=g(1)=0$,

$$g'(x)=\ln 2-\frac{2x}{1+x^2},$$

$$g''(x)=-2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0,\quad x\in(0,1).$$

由此知, $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是凹函数,故 $g(x)>0, x\in(0,1)$. 从而 $f'(x)<0$,即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上严格单减. 于是 $f(x)>f(1)=0$, 这样就证明了原不等式.

例 8.23 证明当 $a>b>1$ 时,成立不等式

$$a^{b^a}>b^{a^b}.$$

证明 原不等式等价于

$$\ln\ln a+a\ln b>\ln\ln b+b\ln a$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{\ln a}{\ln b}>\ln b\left(b\frac{\ln a}{\ln b}-a\right).$$

若记 $x=\dfrac{\ln a}{\ln b}>1, y=\ln b>0$, 则上式可进一步化为:

$$\ln x>y(xe^y-e^{xy}). \tag{1}$$

引入辅助函数 $f(y)=xe^y-e^{xy}$,则 $f'(y)=x(e^y-e^{xy})<0$, 所以

$$f(y)<f(0)=x-1.$$

若 $f(y)\leqslant 0$,由 $\ln x>0, y>0$ 可知,$\ln x>0>yf(y)$, 即式(1)成立;

若 $f(y)>0$,即 $xe^y-e^{xy}=e^y(x-e^{(x-1)y})>0$, 由此可知,

$$e^{\ln x}-e^{(x-1)y}>0,$$

亦即　　$$\ln x > (x-1)y.$$

注意到$f(y) < x-1, \forall y > 0$, 由上式可得

$$\ln x > (x-1)y > yf(y),$$

即式(1)也成立. 从而只要 $a > b > 1$, 原不等式总成立.

类题 1　设$a,b>0,a\neq b$, 问在什么条件下成立 $a^b > b^a$? 并由此比较 e^{π} 与 π^e 及$(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 与$(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 的大小?

提示　将原不等式取对数化成:

$$\frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}.$$

令$f(x) = \frac{\ln x}{x}$,考察$f(x)$ 在$(0, +\infty)$ 的单调性.

类题 2　设$0 < x < y$, 证明不等式:

$$\frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}} < \arctan y - \arctan x.$$

(中科院—中科大).

提示　令 $F(y) = \arctan y - \arctan x - \frac{y-x}{\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{1+y^2}}$, 则

$$F(x) = 0, \quad F'(y) = \frac{1}{1+y^2}\left(1 - \frac{1+xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}\right).$$

注意到 $\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = \sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}$

$$> \sqrt{1+2xy+x^2y^2} = 1+xy,$$

可知,　　$$F'(y) > 0.$$

例 8.24　设$b > a > 1, f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, 证明:

$$0 < f(b) - f(a) \leqslant \frac{1}{4}(b-a).$$

证明　由拉格朗日中值定理知, $\exists \xi \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) = \frac{\xi-1}{\xi^2}(b-a), \quad \xi > a > 1.$$

因为上式右端大于0,所以$f(b) - f(a) > 0$.

下面只需证明: $\frac{\xi-1}{\xi^2} \leqslant \frac{1}{4}, \quad \xi > 1.$

令$g(x) = \frac{x-1}{x^2}$,则$g'(x) = \frac{x(2-x)}{x^4}$,显然$x = 2$是$g(x)$在$(1, +\infty)$上的唯一驻点. 因为当$x > 2$时,$g'(x) < 0$;当$1 < x < 2$时,$g'(x) > 0$,所以$x = 2$是

$g(x)$ 的最大值点. 于是 $g(x) \leqslant g(2) = \frac{1}{4}$, 从而原不等式成立.

类题 设 $x > 0$,证明:$2\arctan x < 3\ln(1+x)$.

提示 原不等式等价于 $\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} < \frac{3}{2}$, $x > 0$.

$\forall x > 0$,在$[0,x]$ 上应用柯西中值定理, $\exists \xi \in (0,x)$, 使得

$$\frac{\arctan x}{\ln(1+x)} = \frac{\arctan x - \arctan 0}{\ln(1+x) - \ln(1+0)} = \frac{1+\xi}{1+\xi^2}.$$

剩下的仿照例题证明 $\frac{1+\xi}{1+\xi^2} < \frac{3}{2}$,$\xi > 0$ 即可.

另外,本题若令 $f(x) = 3\ln(1+x) - 2\arctan x$, 利用单调性证明更为简单!

例 8.25 求出使不等式 $a^x > x^a (x > 0)$ 成立的一切正数 a.

解 原不等式等价于 $x\ln a \geqslant a\ln x \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \geqslant \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ $\begin{cases} < 0, & x > \mathrm{e}, \\ = 0, & x = \mathrm{e}, \\ > 0, & 0 < x < \mathrm{e}. \end{cases}$

由此可知 $x = \mathrm{e}$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一极大值点,所以它是最大值点,最大值为 $f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$. 欲使原不等式成立,只要 $\frac{\ln a}{a} \geqslant \frac{1}{\mathrm{e}}$ 即可. 从而使原不等式成立的一切正数 a 适合条件:$a^a \geqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$.

类题 1 求实数 α 的范围,使得对任何正数 x, y 都成立下面的不等式:

$$x \leqslant \frac{\alpha-1}{\alpha} y + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}.$$

提示 固定 x,令 $f(y) = \frac{\alpha-1}{\alpha} y + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}$,则 $f'(y) = \frac{\alpha-1}{\alpha}\left(1 - \frac{x^\alpha}{y^\alpha}\right)$. 当 $\alpha > 1$ 时,$y = x$ 为最小值点,此时等式成立;当 $\alpha = 1$ 时,不等式显然成立;当 $\alpha < 1$ 时,$y = x$ 为最大值点,此时 $x > \frac{\alpha-1}{\alpha} y + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{y^{\alpha-1}}$, 即原不等式不成立.

类题 2 (1)设 $\alpha > 0, \beta > 0$,证明:

$$\int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta \mathrm{d}x < \frac{\alpha^\alpha \beta^\beta}{(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}};$$

(2)设 $0 < x < 1$,证明: $\sum_{i=1}^{n} x^i (1-x)^{2i} \leqslant \frac{4}{23}$(中科院).

提示 (1)求被积函数 $f(x) = x^\alpha (1-x)^\beta$ 在$[0,1]$上的最大值,即得结论.

(2)令 $f_i(x) = x^i (1-x)^{2i}$,求 $f_i(x)$ 在$(0,1)$内的最大值即可.

例 8.26　设 $a,b>0$,证明不等式:

$$\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{(1-x)^2}\geqslant (a+b)^3,0<x<1.$$

(华中科技大学).

分析　a 与 b 在不等式中的地位是同等的,因此如果令 $x=1-t$,则可将原不等式化为与之等价的形式:

$$\frac{a^3}{(1-t)^2}+\frac{b^3}{t^2}\geqslant (a+b)^3,0<x<1.$$

进而,又可等价地化为:

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}\geqslant\frac{2(a+b)^3}{a^3+b^3},0<x<1,a,b>0.$$

证明　记 $f(x)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2},0<x<1$,由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=+\infty$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的最小值必在内部取到.

$$f'(x)=2\frac{x^3-(1-x)^3}{x^3(1-x)^3},\quad f''(x)=6\left[\frac{1}{x^4}+\frac{1}{(1-x)^4}\right].$$

令 $f'(x)=0$ 可得驻点 $x=\frac{1}{2}$,注意到 $f''\left(\frac{1}{2}\right)>0$,所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内的最小值为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=8$.

再记 $g(a)=\frac{2(a+b)^3}{a^3+b^3},a\geqslant b>0$,则有

$$g'(a)=6(a+b)^2b\frac{b^2-a^2}{(a^3+b^3)^2}<0.$$

由此可知,$g(a)$ 在 $[b,+\infty)$ 上单调递减,即 $g(a)$ 在 $[b,+\infty)$ 上的最大值在 $a=b$ 处取到,且 $g(a)=8$.

综上,我们完成了不等式的证明.

说明:本题将 a,b 视为常数,直接用单调性方法证明并不困难. 在这里,我们主要是为了介绍方法.

例 8.27　求最小的 β 和最大的 α,使对所有的自然数 n,有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta}.$$

(北师大;中科院)

证明　由于 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\leqslant \mathrm{e}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\beta},\forall n\in\mathbf{N}_+$

$$\Leftrightarrow (n+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant 1\leqslant (n+\beta)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),\forall n\in\mathbf{N}_+.$$

$$\Leftrightarrow \alpha \leqslant \frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n \leqslant \beta, \forall n \in \mathbf{N}_+.$$

因此

$$\alpha = \inf_{n\in\mathbf{N}_+}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right),$$

$$\beta = \sup_{n\in\mathbf{N}_+}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} - n\right).$$

将离散变量换成连续变量. 令

$$f(x) = \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}, x \in (0,1].$$

下证: $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格单调递减,因而

$$\alpha = f(1), \beta = \lim_{x\to 0^+} f(x).$$

事实上,

$$f'(x) = \frac{(1+x)[\ln(1+x)]^2 - x^2}{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2}.$$

令 $g(x) = (1+x)[\ln(1+x)]^2 - x^2$, 则

$$g'(x) = 2\ln(1+x) + [\ln(1+x)]^2 - 2x,$$

$$g''(x) = \frac{2}{1+x}[\ln(1+x) - x] < 0, \quad x \in (0,1].$$

由此可见, $g'(x)$ 严格↓. 由 $g'(0) = 0$ 可推出 $g'(x) < g'(0) = 0, \forall x \in (0,1]$. 这表明 $g(x)$ 严格↓,又由 $g(0) = 0$ 推出 $g(x) < 0, \forall x \in (0,1]$,从而 $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上严格↓. 于是有

$$\alpha = f(1) = \frac{1}{\ln 2} - 1,$$

$$\beta = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{x - \ln(1+x)}{x\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

类题 证明:集合 $A = \left\{\alpha \,\middle|\, \forall x > 0, \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha} > \mathrm{e}\right\}$ 有最小值,并求其最小值(北师大).

提示　不等式 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\alpha}>\mathrm{e}\Leftrightarrow(x+\alpha)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>1$

$$\Leftrightarrow\alpha>\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x,x>0.$$

记 $f(x)=\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}-x$，则 $\alpha\in A$ 是 $f(x)$ 在 $x>0$ 的上界. 于是

$$\min A=\sup_{x>0}f(x).$$

由于 $f'(x)>0$，所以 $\sup\limits_{x>0}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. 利用泰勒展开不难算出 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$，故 $\min A=\frac{1}{2}$.

例 8.28　求最小实数 C，使得满足 $\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续函数 $f(x)$ 都有 $\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$.（第四届全国大学生数学竞赛（非数学类）预赛试题）

证明　一方面，$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 t|f(t)|\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=2$.

另一方面，如果取 $f_n(x)=(n+1)x^n$，则有 $\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$. 而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=\frac{2(n+1)}{n+2}\to 2\quad(n\to\infty),$$

由此可知，最小实数 $C=2$.

四、积分不等式

对含有定积分的不等式我们经常要用中值定理（包括微分中值和积分中值定理）和定积分的性质（特别是分部积分法）来证明它. 许多题目还要用到特别的技巧，比如通过重积分来证明. 下面将会看到这方面的例子.

例 8.29　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，$f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\neq 0$，证明：$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant 4$（川大）.

证明　记 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$，由已知条件，$\exists c\in(0,1)$，使 $f(c)=M$. 由拉格朗日中值定理，有

$$f(c)=f(c)-f(0)=f'(\xi_1)c,\quad\xi_1\in(0,c),$$
$$-f(c)=f(1)-f(c)=f'(\xi_2)(1-c),\quad\xi_2\in(c,1).$$

于是有

$$f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=-\frac{M}{c(1-c)},$$

从而

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x\geqslant\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left|\frac{f''(x)}{M}\right|\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{M}\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}f''(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{1}{M}|f'(\xi_2)-f'(\xi_1)|=\frac{1}{c(1-c)}\geqslant 4.$$

这里应用了 $c(1-c)\leqslant\left(\frac{c+(1-c)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

例 8.30 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导,证明:对一切 n,有

$$\left|\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n+2}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2}\right|\leqslant\frac{1}{4(n+1)}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(川大).

证明 由于

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n+2}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[f(0)-f\left(\frac{1}{2n+2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2n+2}\right)-f\left(\frac{2}{2n+2}\right)\right]+$$

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2}{2n+2}\right)-f\left(\frac{3}{2n+2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3}{2n+2}\right)-f\left(\frac{4}{2n+2}\right)\right]+\cdots+$$

$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2n}{2n+2}\right)-f\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)\right]-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)-f(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}\left[f\left(\frac{k-1}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k}{2n+2}\right)\right]-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}\left[f\left(\frac{k}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k+1}{2n+2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n+1}\left\{\left[f\left(\frac{k-1}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k}{2n+2}\right)\right]-\left[f\left(\frac{k}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k+1}{2n+2}\right)\right]\right\},$$

应用拉格朗中值定理,有

$$f\left(\frac{k-1}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k}{2n+2}\right)=f'(\xi_k)\left(-\frac{1}{2n+2}\right),\xi_k\in\left(\frac{k-1}{2n+2},\frac{k}{2n+2}\right)$$

和

$$f\left(\frac{k}{2n+2}\right)-f\left(\frac{k+1}{2n+2}\right)=f'(\eta_k)\left(-\frac{1}{2n+2}\right),\eta_k\in\left(\frac{k}{2n+2},\frac{k+1}{2n+2}\right).$$

显然

$$\xi_k<\eta_k,k=1,2,\cdots,2n+1.$$

所以

$$\left|\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k f\left(\frac{k}{2n+2}\right)+\frac{f(1)-f(0)}{2}\right|$$

$$= \frac{1}{2(2n+2)}\left|\sum_{k=1}^{2n+1}(f'(\eta_k)-f'(\xi_k))\right| = \frac{1}{4(n+1)}\left|\sum_{k=1}^{2n+1}\int_{\xi_k}^{\eta_k} f''(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{4(n+1)}\int_{\xi_1}^{\eta_{2n+1}}\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{4(n+1)}\int_0^1\left|f''(x)\right|\mathrm{d}x.$$

例 8.31　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单增，证明：

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

当 $f(x)$ 非负时，本题有明显的物理意义：如果曲线 $y=f(x)$ 单增，则密度均匀的曲边梯形

$$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$$

的质心不可能落在直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的左边.

证明　本题有许多种证法，但关键是要利用 f 的单调性和 $x-\dfrac{a+b}{2}$ 关于积分区间的中点为奇函数的性质. 下面给出两种证法.

证法 1　构造变上限积分函数. 令

$$F(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a+x}{2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则 $F(a)=0$，且

$$F'(x) = \frac{x-a}{2}f(x) - \frac{1}{2}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^x (f(x)-f(t))\,\mathrm{d}t \geqslant 0 \quad (\text{因为 } f(x) \text{ 单增}).$$

由此知 $F(x)$ 单增，故 $F(b)\geqslant F(a)=0$，即

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) \geqslant 0.$$

证法 2　因为 f 单增，所以

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\geqslant 0.$$

将上式关于 x 从 a 到 b 积分，有

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)\mathrm{d}x \geqslant 0,$$

即

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x - \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

注意到

$$\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = 0$$

立即可知欲证的不等式成立.

例 8.32 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导,证明

$$|f(x)| \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法 1 用积分中值定理. 因为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(\xi), \quad \xi \in [0,1], \quad \text{而} f(x) = f(\xi) + \int_\xi^x f'(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$|f(x)| \leqslant |f(\xi)| + \int_\xi^x |f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法 2 用分部积分法. 因为

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

而

$$\begin{aligned}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t &= tf(t)\Big|_0^x - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t \\ &= xf(x) - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t &= (t-1)f(t)\Big|_x^1 - \int_x^1 (t-1)f'(t)\mathrm{d}t \\ &= (1-x)f(x) + \int_x^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = f(x) - \int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t + \int_x^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t.$$

故

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^x tf'(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 (1-t)f'(t)\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t + \int_x^1 |f'(t)|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t + \int_0^1 |f'(t)|\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

类题 设$a > 0$,$f'(x)$在$[0,a]$上连续,证明:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

例 8.33 设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导,证明:

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.$$

证明　分两种情况讨论.

(1)如果$f(x)$在$[0,1]$上不变号,则

$$\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\};$$

(2)如果$f(x)$在$[0,1]$上变号,则$\exists x_0 \in (0,1)$,使得$f(x_0)=0$. 又因为$f(x)$在$[0,1]$上连续,所以存在$\xi \in (0,1)$, 使得

$$|f(\xi)| = \max_{x\in(0,1)} |f(x)| > 0.$$

故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x &\leqslant \max_{x\in(0,1)} |f(x)| = |f(\xi)-f(x_0)| \\ &= \left|\int_{x_0}^{\xi} f'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \max\left\{\int_0^1 |f'(x)|\mathrm{d}x, \left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\right\}.\end{aligned}$$

例 8.34　设$f(x)$在$[a,b]$上二阶连续可导,证明:

$$\max_{x\in(a,b)} |f'(x)| \leqslant \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x + \frac{18}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

证明　记$l=b-a$. 取$x_1 \in \left[a, a+\frac{l}{3}\right]$,$x_2 \in \left[b-\frac{l}{3}, b\right]$, 由微分中值定理,有

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}, \xi \in (x_1,x_2),$$

即

$$|f'(\xi)| \leqslant \frac{3}{l}(|f(x_1)|+|f(x_2)|).$$

于是,$\forall x \in [a,b]$, 有

$$|f'(x)| \leqslant |f'(x)-f'(\xi)| + |f'(\xi)| \leqslant \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x + \frac{3}{l}(|f(x_1)|+|f(x_2)|).$$

对上式两边,分别关于x_1和x_2在$\left[a, a+\frac{l}{3}\right]$和$\left[b-\frac{l}{3}, b\right]$上积分, 可得

$$\begin{aligned}\left(\frac{l}{3}\right)^2 |f'(x)| &\leqslant \left(\frac{l}{3}\right)^2 \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x + \frac{3}{l}\left(\frac{l}{3}\int_a^{a+\frac{l}{3}} |f(x_1)|\mathrm{d}x_1 + \frac{l}{3}\int_{b-\frac{l}{3}}^b |f(x_2)|\mathrm{d}x_2\right) \\ &\leqslant \left(\frac{l}{3}\right)^2 \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即

$$|f'(x)| \leqslant \int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x + \frac{18}{l^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x.$$

进而有

$$\max_{x\in(a,b)}|f'(x)|\leqslant\int_a^b|f''(x)|\mathrm{d}x+\frac{18}{(b-a)^2}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

这就是所谓的内插不等式.

类题 设$f(x)$在$[0,1]$上二阶连续可导,则$\forall\xi\in\left(0,\frac{1}{3}\right),\eta\in\left(\frac{2}{3},1\right)$,有

$$|f'(x)|\leqslant 3|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x.$$

提示 由中值定理,$f(\xi)-f(\eta)=f'(\theta)(\xi-\eta),\theta\in(\xi,\eta)$.

故
$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant|f'(\theta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\\&=\left|\frac{f(\xi)-f(\eta)}{\xi-\eta}\right|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant 3|f(\xi)-f(\eta)|+\int_0^1|f''(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 8.35 设$f(x)$在$[0,1]$上可微,且$0<f'(x)<1,x\in(0,1),f(0)=0$,证明:

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

证法 1 用单调性证明. 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2-\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$$

则显然$F(0)=0$,而

$$\begin{aligned}F'(x)&=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^3(x)\\&=f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x)\right].\end{aligned}$$

由$0<f'(x)<1$及$f(0)=0$知,$f(x)>0,x\in(0,1)$. 为证明$F'(x)>0$,再令

$$g(x)=2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f^2(x),$$

则$g(0)=0$,而

$$g'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0,\quad x\in(0,1).$$

故$F'(x)>0$,从而$F(x)>F(0)=0$. 特别地$F(1)>0$,即

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2 用中值定理证明. 令

$$F(x)=\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2,\quad G(x)=\int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$$

连续使用两次柯西中值定理,有

$$\frac{\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2}{\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{F(1)-F(0)}{G(1)-G(0)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$$

$$=\frac{2f(\xi)\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^3(\xi)}=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)}\quad(0<\xi<1)$$

$$=\frac{2\int_0^\xi f(t)\,\mathrm{d}t-2\int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t}{f^2(\xi)-f^2(0)}=\frac{2f(\eta)}{2f(\eta)f'(\eta)}$$

$$=\frac{1}{f'(\eta)}>1\quad(0<\eta<\xi<1),$$

去分母即得要证的不等式.

例 8.36　设$f(x)$在实轴上有界且可微,并满足

$$|f(x)+f'(x)|\leqslant 1.$$

证明:$|f(x)|\leqslant 1,x\in(-\infty,+\infty)$(北师大).

证明　在不等式$|f(x)+f'(x)|\leqslant 1$两边同乘以e^x,有

$$|(\mathrm{e}^x f(x))'|\leqslant \mathrm{e}^x,$$

即

$$-\mathrm{e}^x\leqslant(\mathrm{e}^x f(x))'\leqslant \mathrm{e}^x.$$

对上式从$-\infty$到x积分,并注意到$f(x)$的有界性,可得

$$-\mathrm{e}^x\leqslant \mathrm{e}^x f(x)\leqslant \mathrm{e}^x,$$

即　　$$-1\leqslant f(x)\leqslant 1,$$

亦即　　$$|f(x)|\leqslant 1.$$

类题　设$f(x)$在$[0,1]$上连续可导,且$f(0)=0,f(1)=1$,证明:

$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

提示　$$\int_0^1|f'(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{|(\mathrm{e}^{-x}f(x))'|}{\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\int_0^1|(\mathrm{e}^{-x}f(x))'|\,\mathrm{d}x\geqslant\left|\int_0^1(\mathrm{e}^{-x}f(x))'\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 8.37　设$f:[-1,1]\to\mathbf{R}$为偶函数,f在$[0,1]$上单调递增. 又设g是$[-1,1]$上的凸函数,即对任意的$x,y\in[-1,1]$及$t\in(0,1)$,有

$$g(tx+(1-t)y)\leqslant tg(x)+(1-t)g(y).$$

证明：$$2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由f为偶函数,可得

$$\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}f(x)g(-x)\mathrm{d}x.$$

于是,有

$$\begin{aligned}2\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\mathrm{d}x\\&=2\int_{0}^{1}f(x)(g(x)+g(-x))\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{1}$$

因为$g(x)$是凸函数,所以函数$h(x)=g(x)+g(-x)$在$[0,1]$上单调递增,故对任意$x,y\in[0,1]$,有

$$(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\geqslant 0.$$

进而有

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]}(f(x)-f(y))(h(x)-h(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant 0.$$

由此可得

$$\begin{aligned}2\int_{0}^{1}f(x)h(x)\mathrm{d}x&\geqslant 2\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\int_{0}^{1}h(x)\mathrm{d}x\\&\geqslant\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}h(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\int_{-1}^{1}g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2}$$

比较式(1)、式(2)两式,可得结论.

例 8.38 设函数$p(x)$在$[a,b]$上非负连续,$f(x),g(x)$在$[a,b]$上连续单调增加,则

$$\left(\int_{a}^{b}p(x)f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{a}^{b}p(x)g(x)\mathrm{d}x\right)\leqslant\left(\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{a}^{b}p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\right).$$

证明 用重积分来证明.考察差

$$\begin{aligned}\Delta&=\int_{a}^{b}p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}p(x)\mathrm{d}x-\int_{a}^{b}p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}p(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{a}^{b}p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}p(y)\mathrm{d}y-\int_{a}^{b}p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_{a}^{b}p(y)g(y)\mathrm{d}y\\&=\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}p(x)f(x)p(y)[g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

交换积分变量x与y的位置,仍然有

$$\Delta=\int_{a}^{b}\int_{a}^{b}p(y)f(y)p(x)[g(y)-g(x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

于是有

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_a^b\int_a^b p(x)p(y)[f(x)-f(y)][g(x)-g(y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant 0,$$

从而原不等式成立.

类题 1　设 f 在 $[0,1]$ 上连续,单调减少且恒取正值,证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

(郑州大学).

提示　仿照例 8.38 的方法证明.

类题 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明:

$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

提示　化成重积分后,利用不等式 $\frac{1}{x}+x\geqslant 2\ (x>0)$ 或 $\mathrm{e}^x \geqslant 1+x\ (x\geqslant 0)$ 可证明之.

注 8.4　若 $(f(x)-f(y))(g(x)-g(y))\geqslant 0$,则称 f 与 g 成正序;若反向不等式成立,则称 f 与 g 成反序.

当 $[a,b]$ 上的连续函数 f 与 g 成正序时,有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant (b-a)\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x; \tag{1}$$

若 f 与 g 成反序,则式(1)的反向不等式成立.

至于式(1)的证明,可在例 8.38 中取 $p(x)=1$,也可仿例 8.38 重新证明.

例 8.39　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且 $0\leqslant f(x)<1$,证明:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}{1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

证明　$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}(1-f(x))\mathrm{d}x.$

因为 $\frac{f(x)}{1-f(x)}$ 与 $1-f(x)$ 成反序,所以由注 8.4 有

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &\leqslant \int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 (1-f(x))\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)}\mathrm{d}x\left[1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right],\end{aligned}$$

整理即得所要证的不等式.

例 8.40 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $0 < m \leqslant f(x) \leqslant M$, 证明:

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证明 显然, $\forall x \in [0,1]$, 有

$$\frac{(f(x)-m)(f(x)-M)}{f(x)} = f(x) - (M+m) + \frac{mM}{f(x)} \leqslant 0.$$

对上式从 0 到 1 积分,得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + Mm\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant M + m.$$

在上式两边同乘以正数 $Mm\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$, 得

$$Mm\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant (M+m)\cdot Mm\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} - \left(Mm\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\leqslant \frac{(M+m)^2}{4}.$$

最后一步的不等式是根据函数 $u(x) = ax - x^2 (x > 0)$ 有最大值 $\frac{a^2}{4}$ 而得到的.

注 8.5 将题中条件 "$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续" 减弱为"$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积", 结论仍然成立. 另外,若将 $[0,1]$ 区间换成 $[a,b]$ 区间,则相应地有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant \frac{(M+m)^2}{4Mm}(b-a)^2.$$

例 8.41 设 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的以 2π 为周期的函数,满足:

(1) $\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0$; (2) $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|, \forall x,y \in \mathbf{R}$.

证明:(1) $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可以取到最大值、最小值;

(2) $\max\limits_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \leqslant \pi L$.

(苏州大学).

证明 (1)由条件(2)知, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续. 由于 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数,所以 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上最值就是 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最值. 而由连续函数的性质知, $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上可以取到最值.

(2)由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续且取到最值,所以 $\exists \xi \in [0,2\pi]$, 使得

$$|f(\xi)| = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

又由条件(1)及积分中值定理可知, $\exists x_0 \in [0,2\pi]$, 使得

$$f(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

下面分三种情形讨论.

(i)若 $\xi = x_0$,则此时 $f(\xi) = f(x_0) = 0$,于是 $\max\limits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = 0$,从而欲证的不等式成立;

(ii)若 $\xi > x_0$,由 $f(x)$ 的周期性,有

$$\begin{aligned} 2|f(\xi) - f(x_0)| &= |f(\xi) - f(x_0)| + |f(x_0 + 2\pi) - f(\xi)| \\ &\leqslant L(\xi - x_0) + L(x_0 + 2\pi - \xi) = 2\pi L, \end{aligned}$$

即

$$|f(\xi)| \leqslant \pi L;$$

(iii)若 $\xi < x_0$,还由 $f(x)$ 的周期性,有

$$\begin{aligned} 2|f(\xi) - f(x_0)| &= |f(\xi) - f(x_0)| + |f(\xi + 2\pi) - f(x_0)| \\ &\leqslant L(x_0 - \xi) + L(\xi + 2\pi - x_0) = 2\pi L, \end{aligned}$$

即

$$|f(\xi)| \leqslant \pi L.$$

例 8.42　设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减、可导,且 $|f'(x)| > f(x) > 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$. 证明:当 $x \in (0,1)$ 时,有 $xf(x) \geqslant \dfrac{1}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

证明　由 f 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减可知,$f'(x) < 0$. 由已知的不等式,有

$$-f'(x) = |f'(x)| > f(x) > 0, \text{即} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} < -1.$$

于是,当 $x \in (0,1)$ 时,两边从 x 到 1 积分可得

$$\int_x^1 \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t < \int_x^1 (-1)\mathrm{d}t = x - 1, \quad \text{或} \quad \frac{f(1)}{f(x)} < \mathrm{e}^{x-1};$$

两边再从 1 到 $\dfrac{1}{x}$ 积分可得

$$\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{f'(t)}{f(t)}\mathrm{d}t < \int_1^{\frac{1}{x}} (-1)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{x}, \quad \text{或} \quad \frac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{f(1)} < \mathrm{e}^{1-\frac{1}{x}}.$$

将上两式相乘,可得

$$\frac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)}{f(x)} < \mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}}. \tag{1}$$

在式(1)中,利用不等式:$\mathrm{e}^{x-\frac{1}{x}} \leqslant x^2$,$x \in (0,1)$(这个不等式用单调性不难证明,请同学们证之)可得结论.

例 8.43　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可导,$f(0) = f(1) = 0$,证明:

(1)存在 $c > 0$,使

$$\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant c\int_0^1 f'^2(x)\mathrm{d}x;$$

(2) c 的最小值为$\frac{1}{\pi^2}$.

证明 (1) 将$f(x)$在$[0,1]$上展开成正弦级数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x,$$

则

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi b_n \cos n\pi x.$$

由巴塞伐尔等式得

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2,$$

$$\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\pi^2 b_n^2 \geqslant \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \pi^2\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\pi^2}\int_0^1 f'^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

由此可见,只要$c \geqslant \frac{1}{\pi^2}$,上述不等式总成立.

(2)为求c的最小值,必须求$f(x)$使式(1)中等号成立. 易见,当$f(x) = \sin \pi x$时,式(1)变成等式,故c的最小值为$\frac{1}{\pi^2}$.

例 8.44 设$f(x)$在$[a,b]$上严格单调递减,$f'(x)$存在,$[f(b),f(a)] \subset \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,且$|f'(x)| \geqslant m > 0$,证明:

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2}{m}.$$

证明 由已知条件$y = f(x)$存在反函数$x = g(y)$,且$g(y)$在$[f(b),f(a)]$上单调减少、可微,并有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f'(x)}.$$

这样就可对$\int_a^b \cos f(x)\,\mathrm{d}x$进行换元,且有

$$\left|\int_a^b \cos f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\int_{f(b)}^{f(a)} \cos y \cdot \frac{1}{f'(x)}\mathrm{d}y\right|$$

$$\leqslant \int_{f(b)}^{f(a)} \frac{\cos y}{m}\mathrm{d}y \leqslant \frac{2}{m}.$$

这里注意到了$\cos y \geqslant 0$.

例 8.45　设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin e^t\mathrm{d}t, x\in(-\infty,+\infty)$. 证明：

$$e^x|f(x)|\leqslant 2,\quad \forall x\in(-\infty,+\infty).$$

证明　由于

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_x^{x+1}\sin e^t\mathrm{d}t=\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u(\text{令 } u=e^t)\\&=-\frac{\cos u}{u}\Big|_{e^x}^{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u\\&=-\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}+\frac{\cos e^x}{e^x}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\cos u}{u^2}\mathrm{d}u,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|f(x)|&\leqslant\frac{|\cos e^{x+1}|}{e^{x+1}}+\frac{|\cos e^x|}{e^x}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{|\cos u|}{u^2}\mathrm{d}u\\&\leqslant\frac{1}{e^{x+1}}+\frac{1}{e^x}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\&=\frac{2}{e^x},\end{aligned}$$

故

$$e^x|f(x)|\leqslant 2,\forall x\in(-\infty,+\infty).$$

例 8.46　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，$f'(x)=\dfrac{1}{e^x+|f(x)|}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$. 证明：$\sqrt{2}\leqslant A\leqslant 1+\ln 2$.

证明　由已知条件，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，因此 $f(x)\geqslant f(0)=1,\forall x\in[0,+\infty)$. 又因为

$$\begin{aligned}A-1&=\int_0^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+|f(x)|}\\&\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2,\end{aligned}$$

所以

$$A\leqslant 1+\ln 2.$$

另一方面，由 $f(x)$ 单调增加可知，$|f(x)|=f(x)\leqslant A$. 于是，有

$$\begin{aligned}A-1&\geqslant\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{e^x+A}\xlongequal{\text{令 } t=e^x}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{At+t^2}\\&\geqslant\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{At^2+t^2}=\frac{1}{A+1}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{A+1},\end{aligned}$$

即

$$A^2 - 1 \geqslant 1, A \geqslant \sqrt{2}.$$

综上,我们完成了证明.

例 8.47 证明: $\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leqslant \frac{1}{s-1} + 1$ $(s > 1)$ (上海大学).

证明 由于 $\frac{1}{s-1} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^s}$, 所以原不等式等价于

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x \leqslant 1. \tag{1}$$

先证式(1)右边的不等式. 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right).$$

若记 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s}\right)$, 则

$$S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^n} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

由此可知,式(1)右边的不等式成立.

为证明式(1)左边的不等式成立,需要证明

$$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)\mathrm{d}x \tag{2}$$

成立.

如图 8-3 所示,式(2)左边表示的是曲边三角形 BCD 的面积,右边表示的是矩形 ABCD 面积的一半. 由此易见,式(2)成立.

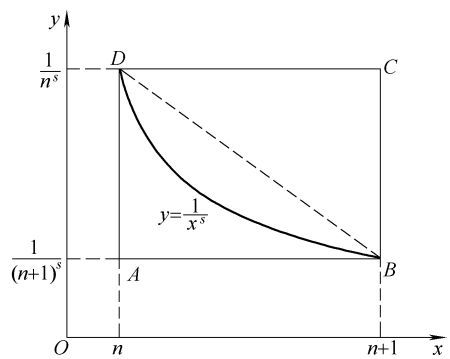


图 8-3 例 8.47 图

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s}\right)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

即式(1)左边的不等式成立.

参 考 文 献

[1]常庚哲,史济怀. 数学分析教程[M]. 南京:江苏教育出版社,1998.

[2]陈纪修,於崇华,金路. 数学分析[M]. 北京:高等教育出版社,2000.

[3]陈启浩. 大学生数学竞赛辅导[M]. 北京:机械工业出版社,2011.

[4]陈启浩. 名师提点考研数学快捷解题方法(数学一适用)[M]. 北京:机械工业出版社,2010.

[5]G Flory. 拓扑与分析习题和解答[M]. 周性伟,白继祖,译. 北京:高等教育出版社,1985.

[6]华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,1991.

[7]胡雁军,李育生,邓聚成. 数学分析中的证题方法与难题选解[M]. 开封:河南大学出版社,1987.

[8]邝荣雨,杨新华,林莉. 数学分析题集[M]. 北京:教育科学出版社,1997.

[9]林源渠,方企勤. 数学分析解题指南[M]. 北京:北京大学出版社,2003.

[10]林源渠,方企勤,李正元,廖可人. 数学分析习题集[M]. 北京:高等教育出版社,1986.

[11]刘隆复,马驷良,陈守东. 数学分析习题课讲义(多元函数部分)[M]. 长春:吉林大学出版社,1986.

[12]刘玉琏,杨奎元,吕凤. 数学分析讲义学习指导书——附解题方法提要[M]. 北京:高等教育出版社,1987.

[13]李文荣. 分析中的问题研究[M]. 北京:中国工人出版社,2001.

[14]沐定夷. 数学分析[M]. 上海:上海交通大学出版社,1993.

[15]P 德苏泽, J 席尔瓦. 伯克利数学问题集[M]. 北京:科学出版社,2004.

[16]裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 北京:高等教育出版社,1993.

[17]舒阳春. 高等数学中的若干问题解析[M]. 北京:科学出版社,2005.

[18]孙本旺,汪浩. 数学分析中的典型例题和解题方法[M]. 长沙:湖南科学技术出版社,1981.

[19]孙涛. 数学分析经典习题解析[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[20]谢惠民,恽自求,易法槐,钱定边. 数学分析习题课讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[21]新乡师范学院数学系. 全国重点大学研究生入学数学试题解析[M]. 郑州:河南教育出版社,1985.

[22]徐利治,王兴华. 数学分析的方法及例题选讲[M]. 修订版. 北京:高等教育出版社,1983.

[23]邹承祖,齐东旭,孙玉柏. 数学分析习题课讲义(一元微积分部分)[M]. 长春:吉林大学出版社,1986.

考研数学分析的复习，要把握住三方面：一、要牢固掌握基本概念，这是深入复习的前提。二、要把课本中各章节的内容整合起来，做到融会贯通。越是能总结和融会，在面对问题时，越能心中有数，知道如何下手。三、在重点和难点上多下工夫，不仅要弄明白，还要熟练掌握。因为这部分见水平，题目的甄选功能更大，是各大高校喜欢出题的地方，因此复习起来事半功倍。

本书照顾了考研复习的三方面，分为八讲，主要内容包括：极限、一元函数的连续性、一元函数的微分学、一元函数的积分学、级数、多元函数的微分学、多元函数的积分学和不等式。

期望本书能帮您取得好成绩！

以往读者评价：

这本书的亮点在于其针对性：重点叙述数学分析课程中的难点和学生做题目感到难受的知识点，如微分中值部分辅助函数的构造，还有利用后面几个章节的知识综合求极限等等，这样对考研备战就很有针对性。

题型非常全面！适合复习！但是题量稍大，要有耐心啊。

很多题目是历年名校数分的压轴题，收获很多。

身边很多人在用就买了，内容确实不错。印刷纸张上乘。



地址：北京市百万庄大街22号
邮政编码：100037
电话服务
社服务中心：010-88361066
销售一部：010-68326294
销售二部：010-88379649
读者购书热线：010-88379203
网络服务
教材网：http://www.cmpedu.com
机工官网：http://www.cmpbook.com
机工官博：http://weibo.com/cmp1952
封面无防伪标均为盗版

ISBN 978-7-111-46233-0
策划编辑◎韩效杰／封面设计◎路恩中

ISBN 978-7-111-46233-0
9 787111 462330 >
定价：49.00元